ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18095

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 10.02.18

Площадка написания Горний Университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	4	–	8	8	–	12	16	–	–	52	пятьдесят два	~~[illegible]~~

№1

$$A = \frac{2^{-2}+2018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} + 4,75 = \frac{\frac{1}{4}+1}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}} + 4,75 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{11}{4}+\frac{9}{4}} + 4,75 =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{20}{4}} + 4,75 = \frac{5}{4\cdot 5} + 4,75 = 5$$

+4б

$0,6A = 0,6\cdot 5 = 3$

Ответ: 3

№4

$\sqrt{x^3-3x+1} = x-1$

(*) $x^3-3x+1 \geq 0$

Д.у. $x-1 \geq 0$

$\underline{x \geq 1}$

$x^3-3x+1 = (x-1)^2$

$x^3-3x+1 = x^2-2x+1$

$x^3-x^2-x = 0$

$x(x^2-x-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ – не удовлетворяет д.у.} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

$x^2-x-1 = 0$

$D = 1+4 = 5$

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ – не удовлетворяет д.у.} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Проверка:

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \geq 0$

$\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + 1 \geq 0$

$\frac{16+8\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} \geq 0$

$2+\sqrt{5} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} \geq 0$

$1,5 - 0,5\sqrt{5} \geq 0$

Сравним: $1,5$ и $0,5\sqrt{5}$

3 и $\sqrt{5}$

9 и 5,

т.к. $9 > 5$, то $1,5 > 0,5\sqrt{5}$, следовательно, $1,5 - 0,5\sqrt{5} \geq 0$ – истина.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

+8б

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18095

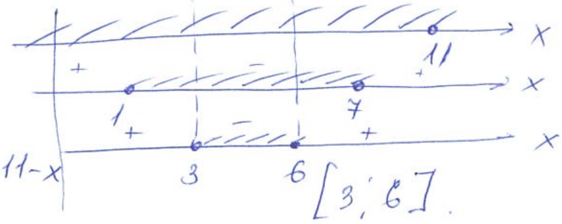
7. $\cancel{\sqrt{8x-x^2-7} \geq \sqrt{9x-x^2-18}}$

$\sqrt{8x-x^2-7} - \sqrt{11-x} \geq \sqrt{9x-x^2-18}$

$\sqrt{8x-x^2-7} \geq \sqrt{9x-x^2-18} + \sqrt{11-x}$

ОДЗ: $\begin{cases} 11-x \geq 0 \\ 8x-x^2-7 \geq 0 \\ 9x-x^2-18 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-11 \leq 0 \\ x^2-8x+7 \leq 0 \\ x^2-9x+18 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 11 \\ (x-1)(x-7) \leq 0 \\ (x-3)(x-6) \leq 0 \end{cases}$



$[3;6]$.

Т.к. обе части неравенства неотрицательны, то возведем обе части в квадрат:

$8x-x^2-7 \geq 9x-x^2-18+2\sqrt{9x-x^2-18}\sqrt{11-x}+11-x$

$0 \geq 2\sqrt{(9x-x^2-18)(11-x)}$

Так как правая часть неравенства всегда неотрицательна, то данное неравенство эквивалентно уравнению:

$2\sqrt{(9x-x^2-18)(11-x)} = 0 \quad |:2$

$\sqrt{(9x-x^2-18)(11-x)} = 0$

$(9x-x^2-18)(11-x) = 0 \quad |\cdot(-1)$

$(x^2-9x+18)(11-x) = 0$

$(x-3)(x-6)(11-x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=11 \text{ – не удовлетворяет ОДЗ.} \\ x=3 \\ x=6 \end{array}\right.$

+12б

Ответ: 3; 6.

5. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1} = \dfrac{2}{3}$

Числитель: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1 = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 =$
$= -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = -2(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = -2\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha = -\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

Знаменатель:

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1 = (\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3-1 = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^3-1 =$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 18095

$$= \frac{1-3\cos2\alpha+3\cos^2 2\alpha-\cos^3 2\alpha}{8}+\frac{1+3\cos2\alpha+3\cos^2 2\alpha+\cos^3 2\alpha}{8}-1=$$

$$=\frac{2+6\cos^2 2\alpha}{8}-1=\frac{6\cos^2 2\alpha-6}{8}=\frac{3\cos^2 2\alpha-3}{4}=\frac{-3\sin^2 2\alpha}{4}$$

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\cdot 4}{-3\sin^2 2\alpha}=\frac{2}{3}$$, ч.т.д.

+8б

№2. Пусть

$\frac{1}{5}x$ – объем ~~добыт~~ добытого газа компанией „Новатэк"

$\frac{1}{2}x$ – объем добытого газа компанией „Роснефть"

$\frac{1}{10}x$ – объем добытого газа компанией „Лукойл"

$0{,}3\cdot\frac{1}{2}x$ – объем добытого газа компанией „Газпром нефть"

~~Тогда $\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x+0{,}3\cdot\frac{1}{2}x$ – объем всего газа, добытого 4-мя компаниями~~

~~$\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x+\frac{3}{20}x=\frac{19}{20}x$~~

Зная, что „Роснефть" добыла на 8 млрд. куб. м. больше, чем остальные компании вместе, то составим уравнение:

$\frac{1}{2}x-8=\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}x+\frac{3}{20}x$ $\quad 8=\frac{1}{20}x$ $\quad$ ~~Всего добыто: $\frac{19}{20}\cdot160=152$ (млрд куб. м)~~.

$\frac{1}{2}x-8=\frac{9}{20}x$ $\quad x=160$

~~Ответ:~~ „Новатэк" – $\frac{1}{5}\cdot160=32$ (млрд куб. м.)

„Роснефть" – $\frac{1}{2}\cdot160=80$ (млрд. куб. м)

„Лукойл" – $\frac{1}{10}\cdot160=16$ (млрд. куб. м)

„Газпром нефть" – $\frac{3}{20}\cdot160=24$ (млрд. куб. м)

+4б

Ответ: 32 млрд куб. м, 80 млрд. куб. м, 16 млрд. куб. м, 24 млрд. куб. м.

№8.

$$\begin{cases}\sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y\\ \cos x-\frac{1}{\cos x}=\cos y\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{\sin^2x-1}{\sin x}=\sin y\\ \frac{\cos^2x-1}{\cos x}=\cos y\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{-\cos^2x}{\sin x}=\sin y\\ \frac{-\sin^2x}{\cos x}=\cos y\end{cases}$$

Т.к. $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, то: $\left(\frac{-\cos^2 x}{\sin x}\right)^2+\left(\frac{-\sin^2 x}{\cos x}\right)^2=1$

$$\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}+\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=1$$

$$\frac{\cos^6 x+\sin^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=1$$

$$\frac{1+3\cos^2 2x}{4\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2x}=1$$

$$1+3\cos^2 2x=\sin^2 2x$$

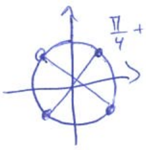
$$\cos^2 2x+\sin^2 2x+3\cos^2 2x=\sin^2 2x$$

$$4\cos^2 2x=0$$

$$\cos 2x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$



Числитель: $\cos^6 x+\sin^6 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3=$

$$=\frac{1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x}{8}+\frac{1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x}{8}=$$

$$=\frac{2+6\cos^2 2x}{8}=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}$$

Знаменатель: $\sin^2 x\cos^2 x=(\sin x\cos x)^2=$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

1) $\cancel{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n}$ $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{\sqrt2}=\sin y\\ \frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{\sqrt2}=\cos y\end{cases}\quad \begin{cases}\sin y=-\frac{\sqrt2}{2}\\ \cos y=-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.\\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$$

2) $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{\sqrt2}=-\cancel{\frac{\sqrt2}{2}}\sin y\\ -\frac{\sqrt2}{2}+\frac{2}{\sqrt2}=\cos y\end{cases}\quad \begin{cases}\sin y=-\frac{\sqrt2}{2}\\ \cos y=\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\\ y=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

3) $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{2}{\sqrt2}=\sin y\\ \frac{\sqrt2}{2}-\frac{2}{\sqrt2}=\cos y\end{cases}\quad \begin{cases}\sin y=\frac{\sqrt2}{2}\\ \cos y=-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\\ y=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

4) $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{2}{\sqrt2}=\sin y\\ -\frac{\sqrt2}{2}+\frac{2}{\sqrt2}=\cos y\end{cases}\quad \begin{cases}\sin y=\frac{\sqrt2}{2}\\ \cos y=\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

Ответ:

$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right);$

$\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k\right);$

$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right);$

$\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right).$

+16 б