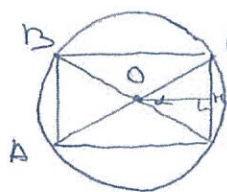


Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	5	5	10	8	10	15	7	20	89	восемьдесят девять	Тру-

№8



Пусть ABCD - прямоугольник, вписанный в данный круг с радиусом 10. Тогда O - точка пересечения его диагоналей и центр окружности. Тогда $OB = OA = OC = OD = 10$ (см). Пусть α - меньший угол между диагоналями.

$$S_0 = \pi r^2 = \pi \cdot 100 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\square} = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} 400 \cdot \sin \alpha = 200 \cdot \sin \alpha \text{ (см}^2\text{)}$$

где α - меньший угол между диагоналями. Тогда по условию: $S_{\square} = \frac{1}{2} S_0 \Rightarrow \frac{1}{2} 100 \pi = 200 \cdot \sin \alpha \Rightarrow$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4} \pi$$

Тогда пусть OH - высота $\triangle OCD \Rightarrow \angle HOD = \frac{\alpha}{2}$, т.к. $\triangle ODC$ - равнобедренный.

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \pm 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ пусть } \sin \frac{\alpha}{2} = x \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4} \pi = \pm 2x \sqrt{1 - x^2}, \text{ т.к. } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1}{16} \pi^2 = 4x^2(1 - x^2)$$

$$4x^4 - 4x^2 + \frac{1}{16} \pi^2 = 0 \quad t = x^2 \quad t > 0$$

$$4t^2 - 4t + \frac{1}{16} \pi^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - \pi^2}}{8} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - \pi^2}}{8}$$

Оба корня t_1 и $t_2 > 0$ т.к. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{16 - \pi^2}}{8} > 0$

$$4 > \sqrt{16 - \pi^2} \quad 16 > 16 - \pi^2 \quad 0 > -\pi^2$$

т.к. $\sin \alpha \neq 1 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$ (т.к. выбрали наименьший угол)
 $\Rightarrow \frac{\alpha}{2}$ - наимен. из 4-х корней, получаемых при решении ур-н

$$x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - \pi^2}}{8} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{16 - \pi^2}}{8}}$$

лист 1 из 5



лист 2 из 3

2) Пусть ~~Значит~~ $|x| < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow$

$$1 < 3(x^2 - 1)$$

$$\frac{4}{3} < x^2$$

То есть получили $\frac{4}{3} < x^2 < 1$ Противоречие.

Значит $\sqrt{\frac{4}{3}} < |x| < 1 \Rightarrow$ Ответ: $x \in (-\sqrt{\frac{4}{3}}; -1) \cup (-1; \sqrt{\frac{4}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{4}{3}}; 1)$
 $x \in (-\sqrt{\frac{4}{3}}; -1) \cup (1; \sqrt{\frac{4}{3}})$

№ 4 $y = 4 - 3 \cdot 2^x$

Пусть $t = 2^x \Rightarrow t > 0$

$$t^2 - 4 + 3 \cdot 2t > 0$$

$$t^2 + 6t - 4 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 16}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2} = -3 \pm \sqrt{13}$$

$-3 - \sqrt{13} < 0$, но $t > 0$ не удов. ест. $\Rightarrow$

$$t_1 = -3 + \sqrt{13} \Rightarrow$$

$$2^x = -3 + \sqrt{13} \Rightarrow x = \log_2(-3 + \sqrt{13})$$

Ответ: $\log_2(-3 + \sqrt{13})$

№ 6. Пусть на предприятии А, В, С запланировано

взять $4x$, $3x$ и $6x$ человек соответственно.

Тогда по условию в реальности взяли $4x+4$, $3x+5$ и

$6x+6$. То есть фактически всего взяли $13x$, а

получилось $13x+4+5+6 = 13x+15$ человек. На 15 человек

добавили на $\frac{9}{13}\%$ больше. $\Rightarrow$

$$\frac{15}{13x} \cdot 100\% = \frac{9}{13}\%$$

$$100 \cdot \frac{15}{13x} = \frac{100}{13} \Rightarrow x = 15$$

Тогда на

$$A = 4x + 4 = 4 \cdot 15 + 4 = 64$$

$$B = 3x + 5 = 3 \cdot 15 + 5 = 50$$

$$C = 6x + 6 = 6 \cdot 15 + 6 = 96$$

Ответ: $\left. \begin{matrix} A - 64 \\ B - 50 \\ C - 96 \end{matrix} \right\}$

лист 3 из 4

15 Пусть частное геом. прогрессии b_n равно q .
То есть $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Известно, что $b_1 = 1$ и $b_5 + b_9 = 6$, то есть

$$b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^8 = 6, \text{ т.е. } b_1 = 1$$

$$q^4 + q^8 = 6 \quad t = q^4, \quad q \neq 0$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t-2)(t+3) = 0$$

$$\swarrow \quad t = 2 \quad \text{и} \quad t = -3 \text{ не угод}$$

$$t = 2 \quad q^4 = 2 \quad q = \pm \sqrt[4]{2}$$

$$\sum_{i=1}^{13} b_i = b_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{12}) = b_1 \frac{q^{13} - 1}{q - 1} = \frac{q^{13} - 1}{q - 1}$$

$$\text{если } q = \sqrt[4]{2} \quad \Sigma = \frac{\sqrt[4]{2^{13}} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

$$\text{если } q = -\sqrt[4]{2} \quad \Sigma = \frac{-8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

Замечу, что частным геом. прогрессии может быть как положительное число, так и отрицательное.

Примем, если под данное условие подходит q , то и $-q$, т.к. первый член не изменяется, а $b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^8 = 6 = b_1 \cdot (-q)^4 + b_1 \cdot (-q)^8$.

Значит возможны два ответа:

$$\text{Ответ} \quad \frac{8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} \quad \text{и} \quad \frac{-8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

Мас 4 из 8

$$\sqrt{9} \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = (\sin x + \cos y)^2 - 2 \sin x \cos y = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \cos x$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sin x - \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ -\sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

1. $\sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$? $t = \sin x$
 $\pm \sqrt{1-t^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ или $+\sqrt{1-t^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$
 $t^2 - t^4 = \frac{3}{16}$ $\Rightarrow s = t^2$

$$s^2 - s + \frac{3}{16} = 0$$

$$16s^2 - 16s + 3 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{32} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{32}$$

$$s_1 = \frac{3}{4} \quad s_2 = \frac{1}{4}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad t_3 = \frac{1}{2} \quad t_4 = -\frac{1}{2}$$

соотв. значения косинуса $\cos x = \pm \sqrt{1-t^2}$

$$\pm \frac{1}{2} \quad \pm \frac{1}{2} \quad \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ подходит только } t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } \cos x = \frac{1}{2} \\ \text{и } t_3 = \frac{1}{2} \text{ при } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

моя 5 и 8

II) $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$t = \sin x$ ~~тогда~~ $\cos x = \pm \sqrt{1-t^2}$

~~$t = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$~~
 $\pm \sqrt{1-t^2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

$t^2(1-t^2) = \frac{3}{16}$

Получаем те же решения что и в Iом случае,
 только $-\cos x + 2\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Подсказка: 1) $\sin x = \frac{1}{2}$
 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos x = -\frac{1}{2}$

1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: 1) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

4) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ 6 из 7

№4 $\log_4(\cancel{2x+2} \cdot 2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$

$$\log_4\left(\frac{(2x+3)(x-1)16}{3}\right) = 2$$

$$\frac{(2x+3)(x-1)16}{3} = 16$$

$$(2x+3)(x-1) = 3$$

$$2x^2 + 3x - 2x - 3 - 3 = 0$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{3}{2}, \text{ но } x > 1$$

Ответ: $x = \frac{3}{2}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

№2 $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} + 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 2 + x$$

$$4(2x+1)(x-3) = (2+x)^2$$

$$8x^2 - 20x - 12 = 4 + 4x + x^2$$

$$7x^2 - 24x - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 448}}{14} = \frac{24 \pm 32}{14}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7} < -0,5 \text{ не уга.}$$

Ответ: $x = 4$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$$

$x \geq -0,5$

№10

Заметим, что $20 + \sqrt{392} = 20 + 14\sqrt{2}$
 $20 - \sqrt{392} = 20 - 14\sqrt{2}$

$20 + \sqrt{392} = (2 + \sqrt{2})^3$, т.к.:

$(2 + \sqrt{2})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 = 8 + 12\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 14 + 14\sqrt{2}$

$(2 - \sqrt{2})^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 = 8 - 12\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2} = 14 - 14\sqrt{2}$ $\Rightarrow$

$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$

Ответ: 4

№5

$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$

Пусть $t = 2^x$, $\Rightarrow t > 0$

$t^2 + 3t - 4 > 0$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$(t + 4)(t - 1) = 0$

$\frac{+}{-4} \quad \frac{-}{0} \quad \frac{-}{1}$ $t > 1 \Rightarrow 2^x > 1 \quad x > 0$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$

Лиса & из ф