

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 13447

Класс 11 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	<i>Григорьев</i>

ШИФР 13447

№1

$$\begin{aligned}
 (x+1)(x+3)(x+5) &= x(x^2-9) & x^2-9 &= (x-3)(x+3) \Rightarrow \\
 \Rightarrow (x+1)(x+3)(x+5) &= x(x-3)(x+3) & \Rightarrow (x+3)((x+1)(x+5) - x(x-3)) &= 0 \\
 (x+1)(x+5) &= x^2+6x+5 & x(x-3) &= x^2-3x \Rightarrow \\
 \Rightarrow (x+3)(x^2+6x+5 - x^2+3x) &= (x+3)(9x+5) = 9(x+3)(x+\frac{5}{9}) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x_1 &= -3 & x_2 &= -\frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = -3$ $x_2 = -\frac{5}{9}$

№2

$$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$$

возведем обе части в квадрат:

$$\begin{aligned}
 (22-x) + (10-x) - 2\sqrt{(22-x)(10-x)} &= 4 \Rightarrow 32 - 2x - 2\sqrt{(22-x)(10-x)} = 4 \quad | :2 \\
 16 - x - \sqrt{(22-x)(10-x)} &= 2 \Rightarrow 14 - x = \sqrt{(22-x)(10-x)}
 \end{aligned}$$

возведем обе части в квадрат

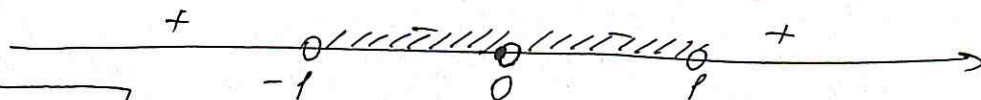
$$\begin{aligned}
 196 + x^2 - 28x &= 220 + x^2 - 10x - 22x = x^2 - 32x + 220 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 196 + x^2 - x^2 - 220 &= -32x + 28x \Rightarrow 4x^2 = 24 \Rightarrow x = 6 \text{ (удовлет. ОДЗ)}
 \end{aligned}$$

Ответ: $x = 6$

№3

$$\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2+2x^2-2}{(x-1)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$\Rightarrow x \neq 0$, $x \neq \pm 1$ — точки разрыва ф-ы $y = \frac{3x^2}{(x-1)(x+1)}$
 нули ф-ы $y = \frac{3x^2}{(x-1)(x+1)}$



Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

№4

$$\begin{aligned}
 \lg(x-13) + 3\lg 2 &= \lg(3x+1) \\
 3\lg 2 &= \lg 8 = \lg 2^3
 \end{aligned}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 13 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > 13$

$$\lg(x-13) + 3\lg 2 = \lg(x-13) + \lg 8 = \lg 8(x-13) \Rightarrow \lg 8(x-13) = \lg(3x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x-13) = 3x+1 \Rightarrow 8x - 104 = 3x+1 \Rightarrow 5x = 105 \Rightarrow x = 21 \text{ (удовлет. ОДЗ)}$$

Ответ: $x = 21$

ШИФР 13447

№5

$$5^{2x+1} > 5^x + 4$$

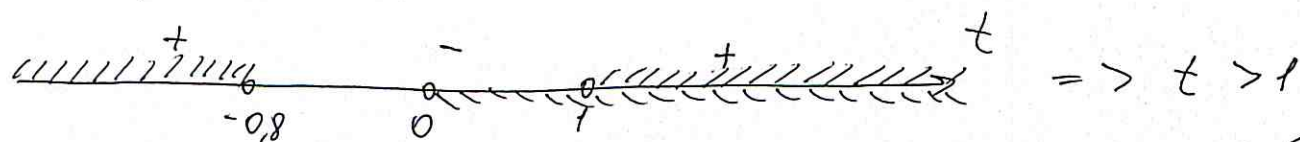
$$5^{2x+1} = 5 \cdot 5^{2x} \Rightarrow 5 \cdot 5^{2x} > 5^x + 4$$

Пусть $5^x = t$, где $t > 0$

$$5t^2 > t + 4 \Rightarrow 5t^2 - t - 4 > 0$$

$$D = 1 + 80 = 81 \quad t_1 = \frac{1+9}{10} = 1 \quad t_2 = \frac{1-9}{10} = -0,8$$

Учтем, что $t > 0$



$\Rightarrow 5^x > 1 \Rightarrow x > 0$, т.к. ф-я $y = 5^x$ - возрастает на всей обл. определе-
ния $5^0 = 1$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$

Пусть в 1-ом корпусе x чел., во 2-ом y чел., в 3-м z чел. Тогда по-
лучим следующ.

$$\begin{cases} x+y+z=119 \\ x=y+4 \\ z=2-3 \end{cases} \Rightarrow y=x-4, z=x+3 \Rightarrow x+y+z = x+(x-4)+(x+3) = 3x-1 = 119$$

$$3x-1=119 \quad 3x=120 \quad x=40 \text{ чел. - в 1-ом корп.}$$

$$y=40-4=36 \text{ чел. - во втором.} \quad z=40+3=43 \text{ чел. - в 3-м}$$

Ответ: $x=40$ чел. - в 1-ом корп., $y=36$ чел. - во 2-ом корп., $z=43$ чел. - в 3-м корп.

№7

$$S_1 = \frac{b_1}{1-q} \quad S_1 = 3$$

$$S_1 = 3$$

Т.к. нам дана сумма квадратов членов прогрессии, то нам
дана сумма членов бесконечно убыв. геометрич. прогрессии, у

которая имеет след. члены: $b_1^2; b_1^2 q^2; b_1^2 q^4; \dots$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{b_1^2}{1-q^2} \quad S_2 = 4,5$$

$$S_2 = \frac{b_1^2}{(1-q)(1+q)}$$

$$\frac{b_1}{1-q} = 3 \Rightarrow b_1 = 3(1-q)$$

$$\frac{b_1^2}{(1-q)(1+q)} = 4,5 \Rightarrow b_1^2 = 4,5(1-q)(1+q)$$

$$\frac{b_1^2}{b_1} = \frac{4,5(1-q)(1+q)}{3(1-q)} = b_1 = 1,5(1+q) \Rightarrow 1,5(1+q) = 3(1-q) \Rightarrow 1+q = 2-2q \Rightarrow$$

$$b = 3(1-\frac{1}{3}) = 2 \quad 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

ШИФР 13447

Если площадь наименьшая из ^{N8} возможностей, то треугольник - правильный.
 Пусть радиус окружностей равен R , сторона треугольника a .
 $\Rightarrow S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ Четырёхугольник $AOIC$ - равнобедренный трапеция.
 $\Rightarrow AC = a = AK + KL + LC$ $AK = \frac{R}{\tan 30^\circ} = LC$ $KL = 2R$
 AO - биссектриса $\angle BAC$ (по св-ву касат., проведённой из одной точки).
 $\Rightarrow \angle L = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \Rightarrow a = R\sqrt{3} + R\sqrt{3} + 2R = 2R(1+\sqrt{3})$
 $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = 2R(1+\sqrt{3}) \Rightarrow R = \frac{\sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{3} \cdot 4(1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}(4+2\sqrt{3})}}$
 $\Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\sqrt{3}+6}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}+6}{4\sqrt{3}+6}} = 1 \text{ гсм}$
 Ответ: $R = 1 \text{ гсм}$

^{N9}
 $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \tan x \tan y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sin x \sin y}{\tan x \tan y} = \frac{3}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4} \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z}) \\ x-y = 2\pi m (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
 $\Rightarrow 2x_1 = (x_1 + y_1) + (x_1 - y_1) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi m = 2\left(\frac{\pi}{3} + \pi(n+m)\right) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi(n+m)$
 $y_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n - x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n - \frac{\pi}{3} - \pi n - \pi m = \frac{\pi}{3} + \pi(n-m)$
 $2x_2 = (x_2 + y_2) + (x_2 - y_2) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi m = 2\left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n+m)\right) \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi(n+m)$
 $y_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n - x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n + \frac{\pi}{3} - \pi n - \pi m = -\frac{\pi}{3} + \pi(n-m)$
 Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(n+m), \frac{\pi}{3} + \pi(n-m)\right), \left(-\frac{\pi}{3} + \pi(n+m), -\frac{\pi}{3} + \pi(n-m)\right), (n, m \in \mathbb{Z})$

^{N10}
 Напишем формулу для куба суммы: $(k+t)^3 = (k+t)(k^2 + 2kt + t^2) =$
 $= k^3 + 3k^2t + 3kt^2 + t^3 = k^3 + t^3 + 3kt(k+t)$



ШИФР 13447

Перепишем эту формулу для наших чисел.

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^3 &= 9+\sqrt{80} + 9-\sqrt{80} + 3\sqrt{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})} (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}) \\ &= 18 + 3\sqrt{81-80} (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}) = 18 + 3(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}) \end{aligned}$$

Пусть $(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}) = t \Rightarrow$ нам нужно найти $t. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t^3 &= 18 + 3t \Rightarrow t^3 - 3t - 18 = 0 \quad \text{Разложим на множители} \\ (t-3)(t^2 + 3t + 6) &= 0 \Rightarrow t_1 = 3 \end{aligned}$$

$$D = 9 - 24 = -15 < 0 \Rightarrow \text{ур-е } t^2 + 3t + 6 = 0 \text{ корней не имеет} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$$

Ответ: $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$