ГАЗПРОМ

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР 5085

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	МАТЕМАТИКА

Фамилия	АХИЯРОВ
Имя	САЛАВАТ
Отчество	ВАДИМОВИЧ

№ школы	ЛИЦЕЙ №1
Населенный пункт	ГОРОД НЕФТЕКАМСК

Номер варианта	6

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	

№1

$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

замена: $x^2+2x=a$

$(a+2)(a-2)=5$

$a^2-4=5$

$a^2=9$

$a=\pm 3$

$x^2+2x=3$ $\qquad$ $x^2+2x=-3$

$x^2+2x-3=0$ $\qquad$ $x^2+2x+3=0$

$D=4+4\cdot 3=16$ $\qquad$ $D=4-12=-8<0$

$x_1=\dfrac{-2+4}{2}=1$ $\qquad$ $\varnothing$

$x_2=\dfrac{-2-4}{2}=-3$

Ответ: $x=-3$; $x=1$

№2

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -0{,}5 \\ x\geq 3 \\ x\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x\geq 3$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3})^2=(2\sqrt{x})^2$$

$$2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}+x-3=4x$$

$$3x-2+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x$$

$$2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=x+2$$

$$4(2x+1)(x-3)=x^2+4x+4$$

$$4(2x^2-6x+x-3)=x^2+4x+4$$

$$4(2x^2-5x-3)=x^2+4x+4$$

$$8x^2-20x-12=x^2+4x+4$$

$$7x^2-24x-16=0$$

$$D=576+4\cdot 7\cdot 16=1024$$

$$x_1=\frac{24+32}{14}=\frac{56}{14}=4$$

$$x_2=\frac{24-32}{14}=\frac{-8}{14}=-\frac{4}{7}\notin ОДЗ$$

Ответ: $x=4$

№3

$$\frac{x^2-2}{x^2-1}<-2 \quad ;\ x\neq\pm 1$$

$$\frac{x^2-2}{x^2-1}+2<0$$

$$\frac{x^2-2+2(x^2-1)}{x^2-1}<0$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1}<0$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1}<0$$

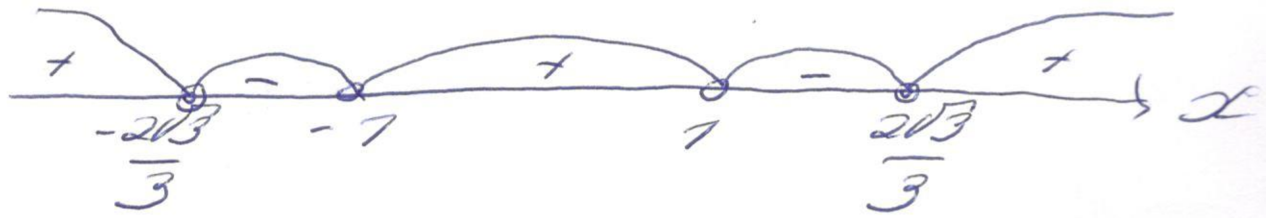
$(3x^2-4)(x^2-1)<0$

$3x^2=4$ $\qquad$ $x^2-1=0$

$x^2=\frac{4}{3}$ $\qquad$ $x=\pm 1$

$x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$(x-\frac{2\sqrt{3}}{3})(x+\frac{2\sqrt{3}}{3})(x-1)(x+1)<0$



Определили знак в крайнем правом промежутке и прочередовали, т.к все скобки в нечетной степени

Ответ: $x\in(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-1)\cup(1;\frac{2\sqrt{3}}{3})$

№4

$\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=2-\log_4(\frac{16}{3})$

$\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=\log_4 16-\log_4(\frac{16}{3})$

свойства: $\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$

$\log_a b-\log_a c=\log_a(\frac{b}{c})$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$\log_4 (2x+3)(x-1) = \log_4 \frac{16\cdot 3}{16}$

$\log_4 (2x^2-2x+3x-3) = \log_4 3$

$\log_4 (2x^2+x-3) = \log_4 3$

$2x^2+x-3=3$

$2x^2+x-6=0$

$D = 1+4\cdot 2\cdot 6 = 49$

$x_1 = \frac{-1+7}{4} = 1.5$

$x_2 = -4$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1.5 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$

$x=-4 \notin$ ОДЗ

Ответ: $x = 1.5$.

№5

$4^x > 4 - 3\cdot 2^x$

$4^x + 3\cdot 2^x - 4 > 0$

$(2^2)^x + 3\cdot 2^x - 4 > 0$

$2^{2x} + 3\cdot 2^x - 4 > 0$

$(2^x)^2 + 3\cdot 2^x - 4 > 0$

Замена: $2^x = a$

$a^2 + 3a - 4 > 0$

$D = 9+16 = 25$

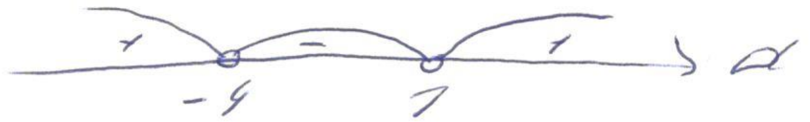
$a_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$a_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085



$a < -4 ; a > 1$

$\left[\begin{matrix} a < -4 \\ a > 1 \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} 2^x < -4 \\ 2^x > 1 \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} \varnothing \\ 2^x > 2^0 \end{matrix}\right. \quad \left[x > 0 \right.$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$

№7

S_{13} - ?

$\begin{cases} b_5 + b_9 = 6 \\ b_1 = 1 \end{cases}$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_5 + b_9 = 6$

$b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^8 = 6$

$b_1 = 1$

$q^8 + q^4 - 6 = 0$

замена: $q^4 = a$

$a^2 + a - 6 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 6 = 25$

$a_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$a_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$ - не удовл (т.к. $q^4 \neq -3$)

$q^4 = 2$

$q = \pm \sqrt[4]{2} = \pm 2^{\frac{1}{4}}$

$S_{13} = \frac{b_1(q^{13} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot ((2^{\frac{1}{4}})^{13} - 1)}{2^{\frac{1}{4}} - 1} =$

$= \frac{2^{\frac{13}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{8 \cdot \sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{(8\sqrt[4]{2} - 1)(\sqrt[4]{2} + 1)}{(\sqrt[4]{2})^2 - 1^2} =$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$$\frac{8\sqrt{2}+8\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}-1}{(\sqrt{2}-1)}=\frac{8\sqrt{2}+7\sqrt[4]{2}-1}{(\sqrt{2}-1)}=$$

$$=\frac{(8\sqrt{2}+7\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1^2}=$$

$$=16+8\sqrt{2}+7\sqrt[4]{8}+7\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1=$$

$$=15+7(2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{3}{4}}) \quad (\text{где } q=2^{\frac{1}{4}})$$

$$S_{13}=\frac{b_1(q^{13}-1)}{q-1}=\frac{b_1((-2^{\frac{1}{4}})^{13}-1)}{-2^{\frac{1}{4}}-1}=$$

$$=\frac{1\cdot(-2^{\frac{13}{4}}-1)}{-2^{\frac{1}{4}}-1}=\frac{-(2^{\frac{13}{4}}+1)}{-(2^{\frac{1}{4}}+1)}=$$

$$=\frac{2^{\frac{13}{4}}+1}{2^{\frac{1}{4}}+1}=\frac{8\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}+1}=\frac{(8\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)}{(\sqrt[4]{2})^2-1^2}=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-8\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{8\sqrt{2}-7\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{(8\sqrt{2}-7\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=$$

$$=8\ 16+8\sqrt{2}-7\sqrt[4]{2^3}-7\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1=$$

$$=15+7\sqrt{2}-7\sqrt[4]{2^3}-7\sqrt[4]{2}=$$

$$=15+7(2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}) \quad (\text{где } q=-2^{\frac{1}{4}})$$

Ответ: $15+7(2^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}})$; +

$15+7(2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{2}})$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

№9

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = a \\ \cos y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ ab = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{4b}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4b} + b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{3}+4b^2}{4b} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2(4b^2-\sqrt{3}) = 4b(1-\sqrt{3})$$

$$8b^2 - 2\sqrt{3} = 4b - 4\sqrt{3}b$$

$$8b^2 + 4\sqrt{3}b - 4b - 2\sqrt{3} = 0$$

$$8b^2 + (4\sqrt{3}-4)b - 2\sqrt{3} = 0$$

$$D = (4(\sqrt{3}-1))^2 + 64\sqrt{3} = 16(3-2\sqrt{3}+1) + 64\sqrt{3} =$$

$$= 16(4-2\sqrt{3}) + 64\sqrt{3} = 64 - 32\sqrt{3} + 64\sqrt{3} =$$

$$= 64 + 32\sqrt{3} = (4\sqrt{3}+4)^2$$

$$b_1 = \frac{-4\sqrt{3}+4+4\sqrt{3}+4}{16} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{-4\sqrt{3}+\cancel{4}-4\sqrt{3}-\cancel{4}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$$a_1 = \frac{-\sqrt{3}}{4\cdot 0{,}5} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-\sqrt{3}}{-\frac{4\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} ; n \in Z$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k \\ y = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k = \\ = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} ; k \in Z$$

$$x = (-1)^n \cdot (-1) \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n =$$
$$= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $\left((-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$;
$\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$; $n, k \in Z$

4б

x - сколько планировалось

$A : B : C = 4 : 3 : 6$

$A - \frac{4x}{13}$

$B - \frac{3x}{13}$

$C - \frac{6x}{13}$

~~$7\frac{9}{13}$ % $= \frac{98}{13}$ % $= \frac{98}{1300} x$~~

~~$\frac{4x}{13} + 4 + \frac{3x}{13} + 5 + \frac{6x}{13} + 16 = x + \frac{98x}{1300}$~~

$$\frac{4x + 52 + 3x + 65 + 6x + 78}{13} = \frac{1398x}{1300}$$

$$\frac{13x + 195}{13} = \frac{1398x}{1300}$$

$$\frac{\cancel{13}(x + 15)}{\cancel{13}} = \frac{1398x}{1300}$$

$$1398x = 1300(x + 15)$$

$$98x = 1300 \cdot 15$$

$$49x = 650 \cdot 15$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$+\frac{9}{13}\% = \frac{100}{13}\% = \frac{100}{1300}x = \frac{1}{13}x$

$\frac{4x}{13}+4+\frac{3x}{13}+5+\frac{6x}{13}+6 = x+\frac{1}{13}x$

$15 = \frac{x}{13}$

$x = 15\cdot 13 = 195$

$a = \frac{4\cdot 195}{13}+4 = 64$

$b = 3\cdot 15+5 = 50$

$c = 6\cdot 15+6 = 96$

$a+b+c = 64+96+50 = 210$

Ответ: 210

№ 10

$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} =$

$= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} =$

$= \cancel{\sqrt[3]{2^3+3\sqrt{2}^2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3}}$

$= \sqrt[3]{2^3+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3}$

$+\sqrt[3]{2^3-3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+$

$+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$

Ответ: 4

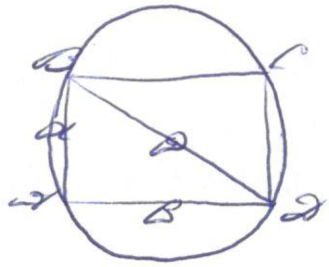
+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

№8



$r = 10$ см

$S_{кр} = 2 S_{ABCD}$

$S_{кр} = \pi r^2 = 100\pi$

$S_{ABCD} = a \cdot b$

$100\pi = 2ab$

$ab = 50\pi$

$a^2 + b^2 = BD^2$

BD - диаметр $\Rightarrow BD = 20$ см

$$\begin{cases} ab = 50\pi \quad ; a = \dfrac{50\pi}{b} \\ a^2 + b^2 = 400 \end{cases}$$

$$\left(\frac{50\pi}{b}\right)^2 + b^2 = 400$$

$$\frac{2500\pi^2}{b^2} + b^2 = 400$$

$$\frac{b^4 + 2500\pi^2}{b^2} = 400$$

$$b^4 + 2500\pi^2 - 400b^2 = 0$$

$b^2 = t$

$$t^2 - 400t + 2500\pi^2 = 0$$

$$D = 160000 - 10000\pi^2 = 10000(16 - \pi^2)$$

$$t_1 = \frac{400 + 100\sqrt{16 - \pi^2}}{2} = \frac{100(4 + \sqrt{16 - \pi^2})}{2}$$

$$t_2 = \frac{400 - 100\sqrt{16 - \pi^2}}{2} = \frac{100(4 - \sqrt{16 - \pi^2})}{2}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5085

$b^2 = c$

$$\left[\begin{array}{l} b = \sqrt{50(4+\sqrt{16-\lambda^2})} = 5\sqrt{8+2\sqrt{16-\lambda^2}} \\ b = \sqrt{50(4-\sqrt{16-\lambda^2})} = 5\sqrt{8-2\sqrt{16-\lambda^2}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{50\lambda}{5\sqrt{8+2\sqrt{16-\lambda^2}}} = \dfrac{10\lambda}{\sqrt{8+2\sqrt{16-\lambda^2}}} \\ a = \dfrac{10\lambda}{\sqrt{8-2\sqrt{16-\lambda^2}}} \end{array}\right.$$

Ответ: $a_1 = \dfrac{10\lambda}{\sqrt{8+2\sqrt{16-\lambda^2}}}$; $b_1 = 5\sqrt{8+2\sqrt{16-\lambda^2}}$

$a_2 = \dfrac{10\lambda}{\sqrt{8-2\sqrt{16-\lambda^2}}}$; $b_2 = 5\sqrt{8-2\sqrt{16-\lambda^2}}$

(+)