ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

Класс ______ Вариант ______ Дата Олимпиады ______

Площадка написания ______

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	Васильев Н.В.

1. $(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$

$(x-3)\left((x-1)(x-5) - x(x+3)\right) = 0$

$x = 3$ $\quad \cancel{x^2} - x - 5x + 5 - \cancel{x^2} - 3x = 0$

$-9x + 5 = 0$

$x = \frac{5}{9}$

+

Ответ: $\left\{\frac{5}{9}; 3\right\}$

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

Слева уравнения две возрастающие функции, их сумма возрастающая ~~ст~~ функция, справа константа, значит уравнение имеет не более одного корня, находим его подбором

$x = 1$

Проверка:

$\sqrt{1-1} + \sqrt{3\cdot 1+1} = 2$

$\sqrt{4} = 2$

$2 = 2$ – верно

И этот ответ подходит под область определения

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases}$

$\boxed{x \geq 1}$

Ответ: $\{1\}$

ГАЗПРОМ **ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

3. $$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

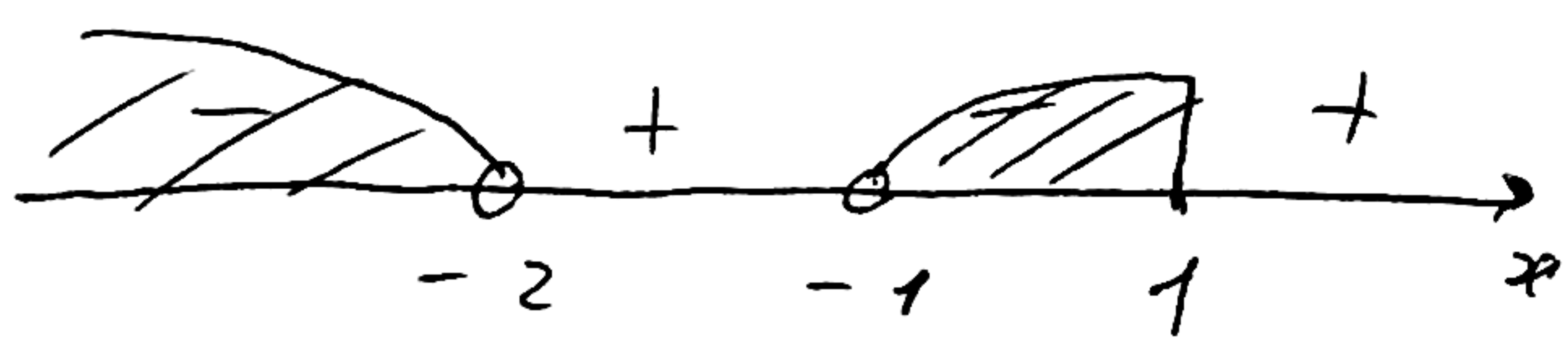
$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

+

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$

$x = 1 \quad x = -1 \quad x = -2$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

$\boxed{x > 0}$

4. $$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$$

+

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x = \frac{6 \cdot 11}{12 \cdot 11}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Ответ: $\{\sqrt{3}\}$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

5. $8\cdot4^x+1\le6\cdot2^x$

$8\cdot\cancel{4}(2^x)^2-6\cdot2^x+1\le0$

Пусть $2^x=t$, $t>0$

$8t^2-6t+1\le0$

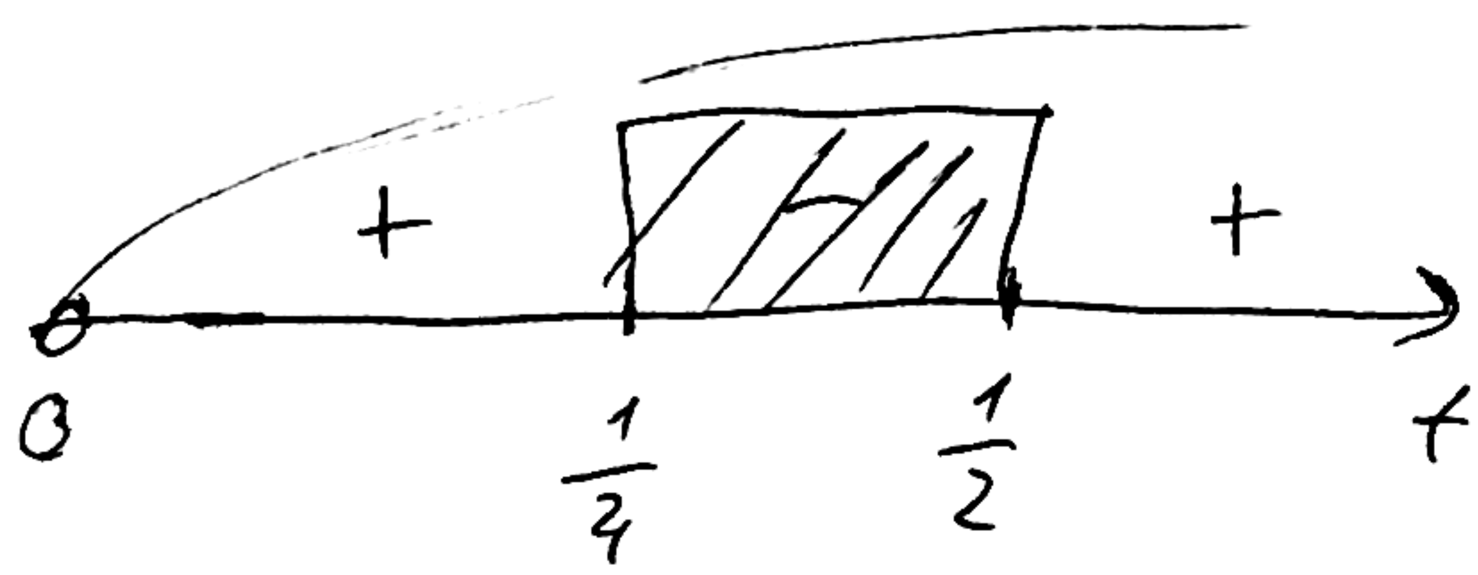
$8t^2-6t+1=0$

$\frac{D}{4}=9-8=1$

$t_{1,2}=\frac{3\pm1}{8}$

$t=\frac{4}{8}$ или $t=\frac{1}{4}$

$t=\frac{1}{2}$



+

$\begin{cases}t\geqslant\frac{1}{4}\\ t\le\frac{1}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}2^x\geqslant2^{-2}\\ 2^x\le2^{-1}\end{cases}$

$\begin{cases}x\geqslant-2\\ x\le-1\end{cases}$ $x\in[-2;-1]$

Ответ: $[-2;-1]$

6. Обозначим кошек сибирской породы как S ангорской a; персидской p; сиамской c. тогда: $2a=c$; $p=1{,}5c$; $S=p-13$

всего было $S+a+p+c=77$ кошек. подставим

$p-13+a+p+2a=77$

$2p+3a=90$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

$2 \cdot 1{,}5c + 3a = 90$

$2 \cdot 1{,}5 \cdot 2a + 3a = 90$

$6a + 3a = 90$

$a = 10$

тогда $c = 2 \cdot a = 20$; $p = 1{,}5c = 30$; $S = p - 13 = 30 - 13 = 17$

Ответ: Сибирской 17
ангорской 10
персидской 30
сиамской 20

(+)

7. Если $\lg 2$; $\lg(2^x - 1)$; $\lg(2^x+1)$ — арифметическая прогрессия, то

средний член равен среднему арифметическому крайних

$$\frac{\lg 2 + \lg(2^x+1)}{2} = \lg(2^x - 1)$$

$$\begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 2^x + 1 > 0 \end{cases}$$

$2^x > 1$

$2^x > 2^0$

$\boxed{x > 0}$

$\lg 2 + \lg(2^x+1) = 2 \cdot \lg(2^x - 1)$

$\lg 2 \cdot (2^x + 1) = \lg(2^x - 1)^2$

Пусть $2^x = t$, $t > 0$ (*)

$\lg(2t+2) = \lg(t-1)^2$

(+)

$2t + 2 = t^2 + 1 - 2t$

$t^2 - 4t - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 4 + 1 = 5$

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$

$\sqrt{5} > 2$, поэтому $2 - \sqrt{5}$ не подходит (по *)

$2^x = 2 + \sqrt{5}$

$x = \log_2(2+\sqrt{5})$

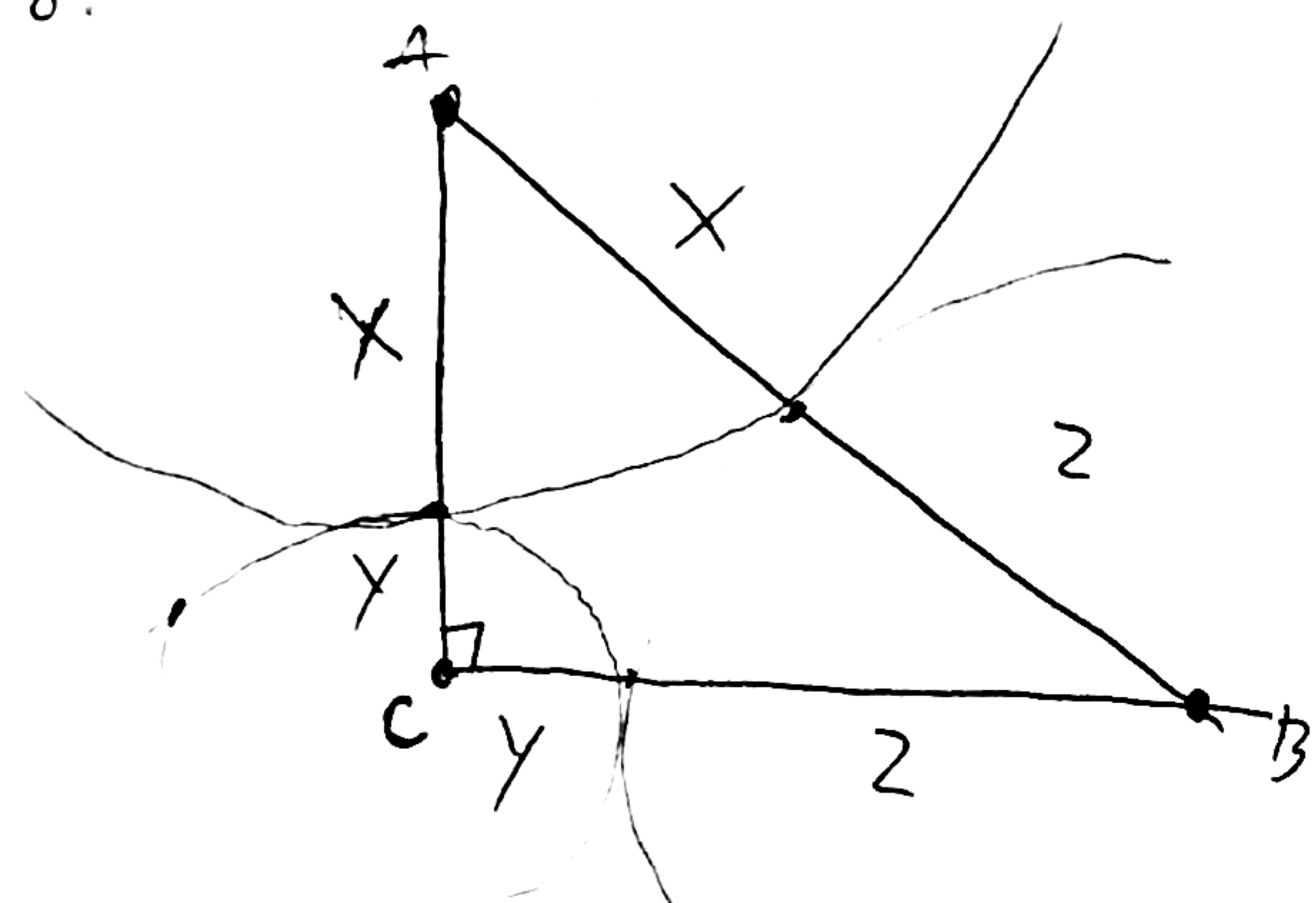
Ответ: ~~x=~~ $\log_2(2+\sqrt{5})$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

8.



Пусть ~~Пусть В окружность~~ окружность с центром в B имеет максимальный радиус $z = 6$ см

И пусть окружность с центром в C имеет средний радиус $y = 4$ см, тогда по теореме Пифагора:

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+z)^2$$

$$(x+4)^2 + 10^2 = (x+6)^2$$

$$\cancel{x^2} + 8x + 16 + 100 = \cancel{x^2} + 36 + 12x$$

$$100 + 16 - 36 = 4x$$

$$100 - 20 = 4x$$

$$x = 20 \text{ см}$$

Это не соответствует условию т.к. x наименьший радиус; аналогично доказывается случай если $y = 6$ см, $z = 4$ см

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+z)^2$$

$$(x+6)^2 + 10^2 = (x+4)^2$$

$$\cancel{x^2} + 12x + 36 + 100 = \cancel{x^2} + 8x + 16$$

$$4x = -100 - 20$$

$$4x = -120$$

$$x = -30 \text{ (см)},$$ что не удовлетворяет задаче.

Значит центр окружности с наименьшим радиусом лежит в точке C

(проверять два предыдущих случая для стороны AC нет смысла,

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

$x = 6$ см; $z = 4$ см;

$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+z)^2$

$(6+y)^2 + (y+4)^2 = 100$

$36 + y^2 + 12y + y^2 + 8y + 16 = 100$

$2y^2 + 20y + 52 - 100 = 0$

$2y^2 + 20y - 48 = 0$

$y^2 + 10y - 24 = 0$

$\cancel{\begin{cases} y_1 y_2 = -24 \\ y_1 + y_2 = -10 \end{cases}}$ $\frac{D}{4} = 25 + 24 = 49$

$y_{12} = -5 \pm 7$

$y = -12$ (вне условия задачи) или $y = 2$

+

Ответ: 2 см

9. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ tg\, x + tg\, y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ tg\, x + tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$ (2)

Решим (2)

$tg\, x + \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\, x}{1 + tg\frac{\pi}{4} \cdot tg\, x} = 3 - 2\sqrt{3}$

$tg\, x + \frac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x} = 3 - 2\sqrt{3}$

Пусть $tg\, x = t$, то

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

$$t+\frac{1-t}{1+t}=3-2\sqrt{3}$$

$$\frac{t+t^2+1-t-(3-2\sqrt{3})(1+t)}{1+t}=0$$

$$t^2+1-(3-2\sqrt{3}+t(3-2\sqrt{3}))=0$$

$$t^2+1-3+2\sqrt{3}-t(3-2\sqrt{3})=0$$

$$t^2-t(3-2\sqrt{3})+2\sqrt{3}-2=0$$

$$t^2+t(2\sqrt{3}-3)+2\sqrt{3}-2=0$$

$$D=(2\sqrt{3}-3)^2-4(2\sqrt{3}-2)=12+9-12\sqrt{3}-8\sqrt{3}+8=$$

$$=29-20\sqrt{3}$$

$$\cancel{t_{12}=\frac{3-2\sqrt{3}\pm\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}}$$

+

$$\cancel{\operatorname{tg} x=\frac{3-2\sqrt{3}+\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}}\quad \text{или}\quad \cancel{\operatorname{tg} x=\frac{3-2\sqrt{3}-\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\cancel{x=\operatorname{arctg}\frac{3-2\sqrt{3}+\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}}\qquad \cancel{x=\overline{3-2\sqrt{3}-\sqrt{29-20\sqrt{3}}}}$$

$29 \vee 20\sqrt{3}$

$841 \vee 400\cdot 3$

$841 \vee 1200$

$841 < 1200$

значит $29<20\sqrt{3}$, значит $29-20\sqrt{3}<0$

т.е. нет корней ($D<0$)

Ответ: нет корней

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 286

10. $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} = a$

$\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = b$

$A = a - b$

$A^3 = (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3 =$

$= \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} -$

$- \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 = \sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(5-4)} +$

$+ 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)(5-4)} = 4 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)} +$

$+ 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

+

$3A = 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$A^3 + 3A = 4 - \cancel{3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)}} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \cancel{3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}} -$

$- 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 4$

Ответ: 4