ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

1

ШИФР 4 4 4 0 3

Класс 11 Вариант 42 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания ООО „Газпром добыча шельф Южно-Сахалинск" Газпром-класс

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	—	10	15	15	20	6	66	шестьдесят шесть	

② $P(x) = A = 6x - x^2$ $q(x) = B = 24x - x^2$

$A = 6x - x^2$ $B = 24x - x^2$

$x^2 - 6x + A = 0$ $x^2 - 24x + B = 0$

x_1, x_2 - корни x_3, x_4 - корни

Из теоремы Виета:

$x_1 + x_2 = 6$ $x_3 + x_4 = 24$

$x_1 + x_1 + n = 6$ $x_1 + 2n + x_1 + 3n = 24$

$2x_1 + n = 6$ $2x_1 + 5n = 24$

Представим x_1, x_2, x_3, x_4 в виде $x_1 + kn$, т.к. x_1, x_2, x_3, x_4 - члены арифметич. прогр.:

$x_1 = x_1 + 0n$,

$x_2 = x_1 + n$,

$x_3 = x_1 + 2n$,

$x_4 = x_1 + 3n$

$$\begin{cases} 2x_1 + n = 6 & (1) \\ 2x_1 + 5n = 24 & (2) \end{cases}$$

Вычтем из (2)-ю (1)-ое:

$4n = 18 \Rightarrow n = 4,5;\ x_1 = 0,75$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0,75 \\ x_2 &= 5,25 \\ x_3 &= 9,75 \\ x_4 &= 14,25 \end{aligned}}$$

Из теоремы Виета:

$x_1 \cdot x_2 = A$ $x_4 \cdot x_3 = B$

$A = 0,75 \cdot 5,25 = 3,9375$ $B = 9,75 \cdot 14,25 = 138,9375$

(+)

Ответ: $A = 3,9375$ $B = 138,9375$

③ $y = 2\cos^2\frac{x}{2} = \cos x + 1$

$y^{(2018)} = (\cos x + 1)^{(2018)} = (-\sin x)^{(2017)} = (-\cos x)^{(2016)}$ $y^{(2018)} = (-\cos x)^{(2016)} = -\cos x$

1) $(-\cos x)' = \sin x$

2) $(\sin x)' = \cos x$

3) $(\cos x)' = -\sin x$

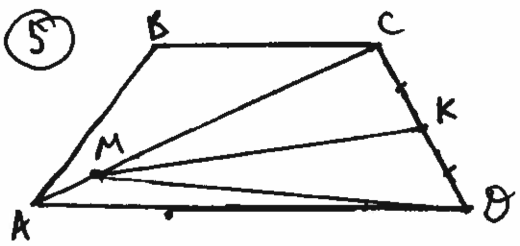
4) $(-\sin x)' = -\cos x$

$\Rightarrow$ Если 4 раза взять производную от $(-\cos x)$ вернёмся в $(-\cos x)$. $2016 = 4 \cdot 504$ Результат не изменится

Ответ: $y^{(2018)} = -\cos x$

(+)

5



Дано:

$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{3}$; $CK = KD$; $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$

Решение:

1) $S_{\triangle MCK} = \frac{MC \cdot CK \cdot \sin\angle MCK}{2}$

2) $S_{\triangle MCD} = \frac{MC \cdot CD \cdot \sin\angle MCK}{2}$

3) $\frac{S_{\triangle MCK}}{S_{\triangle MCD}} = \frac{2 \cdot MC \cdot CK \cdot \sin\angle MCK}{2 \cdot MC \cdot CD \cdot \sin\angle MCK} = \frac{CK}{CD} = \frac{CK}{CK+KD} = \frac{CK}{2CK} = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$S_{\triangle MCD} = 2 S_{\triangle MCK}$

4) $S_{\triangle AMD} = \frac{AM \cdot MD \cdot \sin\angle AMD}{2}$

5) $S_{\triangle CMD} = \frac{CM \cdot MD \cdot \sin\angle CMD}{2}$

6) $\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle CMD}} = \frac{2 \cdot AM \cdot MD \cdot \sin\angle AMD}{2 \cdot CM \cdot MD \cdot \sin\angle CMD} = \frac{AM \cdot \sin\angle AMD}{CM \cdot \sin\angle CMD} = \frac{1}{3}$

$(\sin\angle CMD = \sin(180 - \angle AMD) = \sin\angle AMD)$

$\Downarrow$

$3 S_{\triangle AMD} = S_{\triangle CMD}$

7) $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AMD} + S_{\triangle CMD} = \frac{S_{\triangle CMD}}{3} + S_{\triangle CMD} = \frac{4}{3} S_{\triangle CMD}$

$\Downarrow$

$3 S_{\triangle ACD} = 4 S_{\triangle CMD}$

8) $S_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AC \cdot \sin\angle BCA}{2}$

9) $S_{\triangle ACD} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin\angle CAD}{2}$

10) $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{2 BC \cdot AC \cdot \sin\angle BCA}{2 AD \cdot AC \cdot \sin\angle CAD} = \frac{BC \cdot \sin\angle BCA}{AD \cdot \sin\angle CAD} = \frac{1}{2}$

($\angle BCA$ и $\angle CAD$ накрест лежащие $\angle BCA = \angle CAD$, т.к. $BC \parallel AD$) ($\sin\angle BCA = \sin\angle CAD$, т.к. $\angle BCA = \angle CAD$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

3

ШИФР 4 4 4 0 3

$2S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$

1.1) $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \frac{3}{2} S_{\Delta ACD} = 2 S_{\Delta CMD} = 4 S_{\Delta MCK}$

$\left(S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta ACD}}{2}\right)$ $\left(S_{\Delta ACD} = \frac{4}{3} S_{\Delta CMD}\right)$ $\left(S_{\Delta MCD} = 2 S_{\Delta MCK}\right)$

1.2) $\frac{S_{\Delta MCK}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$ (+)

4) $\sqrt{\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\cos\frac{x}{2019} + \cos x - \sqrt{3}} - \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Пусть $\cos\frac{x}{2019} + \cos x - \sqrt{3} = a$, а $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = b$, тогда

$a - b = \cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ОДЗ: $a \geq 0$, $b \geq 0 \Rightarrow a \geq b \geq$, $a \geq b$

$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ $(\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0)$

$a - b = a - 2\sqrt{ab} + b$

Рассмотрим 2 случая:

$b = \sqrt{ab}$ ($b \geq 0$ по ОДЗ)

$b^2 = ab$

1) $a = b$ 2) $b = 0$

$b(b - a) = 0$

1) $\begin{cases} a = b \\ a \geq b \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{2019} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\left(336\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 4038\pi k, k \in Z \\ x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z \end{cases}$

в 1) нет корней

(2) $\begin{cases} b=0 \\ a \geq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{x}{2016} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \ m \in Z \\ x \in [-\frac{\pi}{2} - 336\pi + 4032\pi k; \frac{\pi}{2} + 336\pi + 4032\pi k] \\ k \in Z \end{cases}$

$\Downarrow$

$\mp$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, где $l \in [-168 + 4038k; 168 + 4038k]$, $k \in Z$

Ответ: ~~xx~~ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, где $l \in [-168 + 4038k; 168 + 4038k]$, $k \in Z$.

(6) $\begin{cases} x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1 \\ -2x^5 + y^5 + 5z^5 = \sqrt{315} \end{cases}$

Пусть $x^5 = k$ $y^5 = l$ $z^5 = m$

$\begin{cases} k^2 + l^2 + m^2 = 1 \\ -2k + l + 5m = \sqrt{315} \end{cases}$

Предположим m - какой-то параметр.

$m \in [-1; 1]$, т.к. $k^2 + l^2 \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow k^2 + l^2 = 1 - m^2$

$\Downarrow$

центр $(0;0)$
окружн. $\rightarrow$
с $r(1-m^2)$

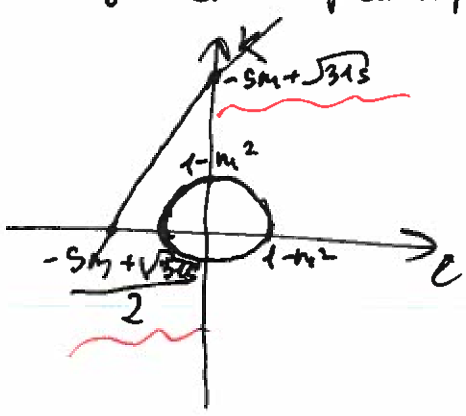
прямая $\rightarrow$

$\begin{cases} k^2 + l^2 = 1 - m^2 \\ l = 2k - 5m + \sqrt{315} \end{cases}$

$17 < \sqrt{315} < 18$

$12 < -5m + \sqrt{315} < 23$, т.к. $m \in [-1; 1]$

Сделаем примерный чертёж:



$r = 1 - m^2$ $\quad 1 - m^2 \in [0; 1] \Rightarrow$
$\Rightarrow r \in [0; 1]$

Рассмотрим, что происходит при:

1) $m = 0$ $\quad l = 2k + \sqrt{315}$ $\quad k^2 + l^2 = 1$

Такие графики не пересекутся,
~~окружность ограничивается квадратом~~
~~2×2 не вошёл в пр~~
т.к. $\frac{\sqrt{315}}{2} > 1$ $\quad \sqrt{315} > 1$

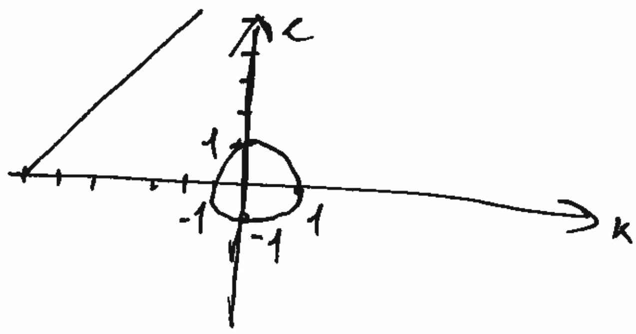
5

2) $m \in (0;1]$, ~~прямая проходит в пределах~~ :

$12 < -5m+\sqrt{315} < 23$ — ~~вершина~~ точка $(0;y_0)$

$6 < \frac{-5m+\sqrt{315}}{2} < 17$ — точка $(x_0;0)$ где x_0 - пересечение прямой с абсциссой, а y_0 - ординатой.

Если прямая проходит через точки 6 и 12, а окружность так и осталась ер радиусом 1, то графики всё равно не касаются.



⇓

графики никогда не касаются

⇓

Система не имеет решений.

$k=x^5$, $l=y^5$, $m=z^5$

z^5 всё равно в пределах от 0 до 1, а x^5 и y^5 это просто увеличенные k и l.

⇓

Тогда эта система тоже не имеет решений.

Вывод: система не имеет решений.

+