ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 5 5 7

Класс 11 **Вариант** 41 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания ООО «Газпром добыча шельф Южно-Сахалинск» Газпром-класс

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	1	10	20	2	48	сорок восемь	

Задание 1

$$A=\frac{\sqrt[3]{38+17\sqrt5}+\sqrt[3]{38-17\sqrt5}}{\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}}=\frac{\sqrt[3]{(2+\sqrt5)^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt5)^3}}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^3}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt5+2-\sqrt5}{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}=\frac{4}{2}=2\text{, при } x=0{,}2019$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$\begin{cases} a^3+3ab^2=38 \\ -3a^2b-b^3=-17\sqrt5 \end{cases}$, методом подбора $a=2$; $b=\sqrt5 \Rightarrow (2-\sqrt5)^3$. Аналогично

с $\sqrt[3]{38+17\sqrt5}=\sqrt[3]{(2+\sqrt5)^3}$

Ответ: $A=2$ (+)

Задание 2

$f(x)=A$, при $x\in\{x_1;x_2\}$; $g(x)=B$, при $x\in\{x_3;x_4\}$. $x_1;x_2;x_3;x_4$ – геометрическая прогрессия, где $x_1>0$; $q>0$; $q\neq1$ (т.к при $q=1$ прогрессия не имеет смысла, а $q>0$ и $x_1>0$, т.к по условию все члены ГП положительны)

$f(x)=4x-x^2$; $g(x)=36x-x^2$

Найти: A,B – ?

Пусть $x_1=a$; q – положительна, тогда $x_1=a$; $x_2=aq$; $x_3=aq^2$; $x_4=aq^3$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a\cdot b)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 5 5 7

По условию $x_1; x_2$ – решение для A, $x_3; x_4$ – решение для B $\Rightarrow$

$f(x_1)=f(x_2)$; $g(x_3)=g(x_4)$, тогда, т.к. ~~эт~~ корни для A и B являются геометрической прогрессией, то составим уравнение:

$\begin{cases}4x_1-x_1^2=4x_2-x_2^2;\\ 36x_3-x_3^2=36x_4-x_4^2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a-a^2=4aq-a^2q^2;\\ 36aq^2-a^2q^4=36aq^3-a^2q^6;\end{cases} \begin{cases}a^2q^2-a^2+4a-4aq=0;\\ a^2q^6-a^2q^4-36aq^3+36aq^2=0;\end{cases}$

$\begin{cases}a^2(q^2-1)-4a(q-1)=0;\\ a^2q^4(q^2-1)-36aq^2(q-1)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}(q-1)(a^2(q+1)-4a)=0;\\ (q-1)(a^2q^4(q+1)-36aq^2)=0;\end{cases}$ $q=1$ – не удв. усл. $q\neq1\Rightarrow$

$q+1\neq0\Rightarrow$ упростим систему $\begin{cases}a^2(q+1)-4a=0;\\ a^2q^4(q+1)-36aq^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a(aq+a-4)=0\\ aq^2(aq^3+aq^2-36)=0\end{cases}$

$a=0$ – не удв. усл. $a>0$, $q^2=0$ – не удв. усл. $q>0$ $\Rightarrow$ упростим систему

$\begin{cases}aq+a-4=0;\\ aq^3+aq^2-36=0;\end{cases}$ $\begin{cases}aq+a=4;\\ aq^3+aq^2-36=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=\dfrac{4}{q+1};\ q\neq-1\\ \dfrac{4q^3}{q+1}+\dfrac{4q^2}{q+1}-36=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=\dfrac{4}{q+1}\\ \dfrac{4q^3+4q^2-36q-36}{q+1}=0\end{cases}$

$4q^3+4q^2-36q-36=0$; $q^3+q^2-9q-9=0$; $(q+1)(q^2-9)=0$; $(q+1)(q-3)(q+3)=0$

$\left[\begin{array}{l}q=-1 \text{ – не удв. усл. } q+1\neq0 \text{ и } q>0\\ q=3\\ q=-3 \text{ – не удв. усл. } q>0\end{array}\right.$ $\Rightarrow q=3$

$\begin{cases}a=\dfrac{4}{q+1}\\ q=3\end{cases}$ $\begin{cases}a=\dfrac{4}{3+1}\\ q=3\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\ q=3\end{cases}$ $\Rightarrow a=1;\ q=3$

Найдем A через x_1 и x_2, и проверим, равны ли значения:

$x_1=a=1$; $x_2=aq=1\cdot3=3$; $f(x)=4x-x^2$

$f(x_1)=4\cdot1-1^2=4-1=3$; $f(x_2)=4\cdot3-3^2=12-9=3$; $3=3\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=A$

$A=3$

Аналогично для B: $x_3=aq^2=1\cdot3^2=9$, $x_4=aq^3=1\cdot3^3=27$

$g(x_3)=36\cdot9-9^2=9(36-9)=9\cdot27=243$; $g(x_4)=36\cdot27-27^2=27(36-27)=27\cdot9=243$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a.b)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 5 5 7

Ответ: $A=3$; $B=243$ +

Задание 3

$y=2\sin^2\frac{x}{2}$; $(y^{(2019)})$ – ?

y – сложная функция, состоящая из $y=\sin^2 x$; $y=\sin x$; $y=\frac{x}{2}$

Начнем с $y=\sin x$. Распишем цикл производных с I по IV порядки

$(\sin x)'=\cos x$; $(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x$; $(\sin x)'''=(-\sin x)'=-\cos x$

$(\sin x)''''=(-\cos x)'=\sin x$ => если цикл кратен IV, то $(\sin x)^a$, где $\{a/4\}\in Z$,

то $(\sin x)^a=\sin x$, 2018/4 – целое число => $(\sin x)^{2019}=(\sin x)^1=\cos x$

$y=\sin^2\frac{x}{2}$ – степенная функция (точнее $y=a^2$; где a – $\sin\frac{x}{2}$)

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

$(a^2)'=2\cdot a^1$

$(2a^1)'=(a^2)''=2\cdot 1\cdot a^0$

$(2\cdot 1\cdot a^0)'=(a^2)'''=2\cdot 1\cdot 0\cdot a^{-1}$, далее будет умножаться

до $(a^2)^{2019}=2\cdot 1\cdot 0\cdot(2016!)\cdot a^{-2017}$, умножаясь отрицательные числа, но

их было 2016 штук => в итоге знак стал +

$\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}=2^{-1}$, т.к. это часть сложной функции, то $\left(\frac{x}{2}\right)=const$, но

умножение на $\frac{1}{2}$ происходит 2019 раз => $\left(\frac{x}{2}\right)^{2019}=\frac{1}{2^{2019}}$ =>

$y^{2019}=2\cdot\frac{1}{2^{2019}}\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(2016!)\cdot \cancel{a^{-2017}}\sin^{-2017}\frac{x}{2}=\frac{0\cdot(2016!)}{2^{2017}}\cdot\sin^{-2017}\frac{x}{2}=$

$=0$

Ответ: $(y)^{2019}=\frac{0\cdot(2016!)}{2^{2017}}\cdot\sin^{-2017}\frac{x}{2}=0$

ШИФР 3 7 5 5 7

Задание 4

$\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=\sqrt{\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1}$;

ОДЗ: $\begin{cases}\cos\frac{x}{2018}\geq\frac{1}{2}\\ \cos x\geq\frac{1}{2}\\ \cos\frac{x}{2018}+\cos x\geq 1\end{cases}$

$\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}+\cos x-\frac{1}{2}+2\cdot\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1$

$2\cdot\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=0$ $\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2018}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z\\ x=\pm\frac{2018\pi}{3}+4036\pi k; k\in Z\end{array}\right.$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z$

$\cos\frac{x}{2018}=\frac{1}{2}$ или $\cos x=\frac{1}{2}$

Рассмотрим решение $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z$

При этом решении решение имеет смысл, только если $\cos\frac{x}{2018}\geq\frac{1}{2}$

$x\geq\pm\frac{2018\pi}{3}+4096\pi k; k\in Z \Rightarrow x\in\left[\frac{2018\pi}{3}+4096\pi k; \frac{2018\pi}{3}+4096\pi k\right] k\in Z$

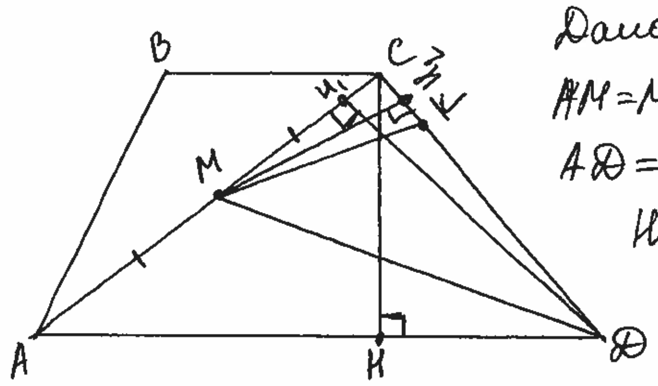
Для $x=\pm\frac{2018\pi}{3}+4096\pi k; k\in Z$ при $\cos x\geq\frac{1}{2}$

$x\geq\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in Z$; при $x\in\left[-\frac{2018\pi}{3}+4096\pi k; \frac{2018\pi}{3}+4096\pi k\right] k\in Z$

$x=\pm\frac{2018\pi}{3}+4096\pi k; k\in Z$ при $x\geq\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n; n\in Z$ ∓

Задание 5



Дано: ABCD - трапеция

AM=MC; 3CK=KD

AD=4BC

Найти: $\frac{S_{\triangle MKD}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение:

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot h(BC+AD)=\frac{1}{2}\cdot CH\cdot(BC+4BC)=2,5\cdot BC\cdot CH$

ШИФР 3 7 5 5 7

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot CH\cdot AD=2BC\cdot CH$; $\cancel{\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{ABCD}}=\frac{2\cdot BC\cdot CH}{2{,}5\cdot BC\cdot CH}=0{,}8}$

$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DH_1$; $S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}\cdot MC\cdot DH_1=\frac{1}{4}\cdot AC\cdot DH_1$

$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CMD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot DH_1}{\frac{1}{4}\cdot AC\cdot DH_1}=\frac{4}{2}=2$; $S_{\triangle ADC}=2\cdot S_{\triangle CMD}$; $S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}\cdot S_{\triangle ADC}$

$S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}\cdot MH_2\cdot CD$; $S_{\triangle MKD}=\frac{1}{2}\cdot MH_2\cdot KD=\frac{1}{2}\cdot MH_2\cdot\frac{3}{4}\cdot CD$

$\frac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle MKD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot MH_2\cdot CD}{\frac{1}{2}\cdot MH_2\cdot\frac{3}{4}\cdot CD}=\frac{4}{3}$; $S_{\triangle CMD}=\frac{4}{3}\cdot S_{\triangle MKD}$

$S_{\triangle MKD}=\frac{3}{4}\cdot S_{\triangle CMD}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{\triangle ACD}=\frac{3}{8}\cdot S_{\triangle ACD}$

$\frac{S_{\triangle MKD}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{3}{8}\cdot S_{\triangle ACD}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{3}{8}\cdot 2\cdot BC\cdot CH}{2{,}5\cdot BC\cdot CH}=\frac{3\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 8}=\frac{12}{40}=$

$=\frac{3}{10}=0{,}3$

Ответ: $\frac{S_{\triangle MKD}}{S_{ABCD}}=0{,}3$ (+)

Задание 6

$\begin{cases}x^6+y^6+z^6=1;\\3x^3+5y^3-4z^3=\sqrt{213};\end{cases}$ В первом уравнении все 3 неизвестные находятся в четных степенях $\Rightarrow$ их предельные значения, при условии, что другие переменные равны 0 это 1 и (-1) $\Rightarrow x\in[-1;1], y\in[-1;1]$ $z\in[-1;1]$ (условие 1)

Рассмотрим 2-е уравнение $3x^3+5y^3-4z^3=\sqrt{213}$. $y=x^3$ – кубическая функция если ~~$x\in(-1;1)$, не~~ $x\in(-1;0)\cup(0;1)$, то $x>x^3$ при $x(0;1)$ и $x^3>x$ при $x\in(-1;0)$, но при $x\in(-1;0)$ $x^3>x$ учитывая знак отрицательности, учитывая, что исходный знак в неравенстве будет ~~давать~~ +, то $x>x^3$ при $x\in(-1;0)\cup(0;1)$,

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 5 5 7

Из этого следует, что максимальное значение для переменных в кубе мы получим, если ~~их~~ они будут равны ± 1. Пусть $x=1; y=1; z=-1$, не учитывая, что $x^6+y^6+z^6=1$, однако мы берем ~~max~~ допустимые значения из условия 1, которые будут давать максимальное значение в кубе, и не уменьшать $3x^3+5y^3-4z^3$.

$3\cdot 1^3+5\cdot 1^3-4(-1)^3=3+5+4=12=\sqrt{144}$. $\sqrt{144}\neq\sqrt{213}$; $\sqrt{144}<\sqrt{213}$ $\Rightarrow$ при $x^6+y^6+z^6=3$ система не имеет решений $\Rightarrow$ при $x^6+y^6+z^6=1$ система также не будет иметь решений, т.к значения для переменных будут меньше $\Rightarrow$ и их значения в кубе будут еще меньше.

Ответ: не имеет решений $(\varnothing)$

+