ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ Газпром

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 4 6 3 4

Класс 11 Вариант 41 Дата Олимпиады 9.02.2019

Площадка написания ООО „Газпром добыча шельф Южно-Сахалинск" Газпром-класс

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	5	10	20	2	52	пятьдесят два	

N1

$$A=\frac{\sqrt[3]{38+17\sqrt5}+\sqrt[3]{38-17\sqrt5}}{\sqrt[3]{1+3x+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}}$$

① Рассмотрим числитель. В нем

$$\sqrt[3]{38+17\sqrt5}=\sqrt[3]{8+12\sqrt5+30+5\sqrt5}=\sqrt[3]{(2+5\sqrt5)^3}=2+5\sqrt5$$

$$\sqrt[3]{38-17\sqrt5}=\sqrt[3]{8-12\sqrt5+30-5\sqrt5}=\sqrt[3]{(2-5\sqrt5)^3}=2-5\sqrt5$$

Значит, числитель $\sqrt[3]{38+17\sqrt5}+\sqrt[3]{38-17\sqrt5}=2+5\sqrt5+2-5\sqrt5=4$

② Рассмотрим знаменатель. В нем

$$\sqrt[3]{1+3x+3\sqrt{x}+x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^3}=1+\sqrt{x}$$

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}=\cancel{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^3}}=\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^3}=\sqrt{x}-1$$

Значит, знаменатель

$$\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}=1+\sqrt{x}-\sqrt{x}+1=2$$

③ $A=\frac{4}{2}=2$, при $x=0,2019$

Ответ: $A=2$.

+

№2.

$f(x) = 4x - x^2$

$4x - x^2 = A$

$x^2 - 4x + A = (x - x_1)(x - x_2)$

$g(x) = 36x - x^2$

$36x - x^2 = B$

$x^2 - 36x + B = (x - x_3)(x - x_4)$

По теореме Виета:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = A \end{cases}$ и $\begin{cases} x_3 + x_4 = 36 \\ x_3 \cdot x_4 = B \end{cases}$

По условию $x_1; x_2; x_3; x_4$ - геометрическая прогрессия, все члены которой положительны. Значит, $x_2 = q x_1$; $x_3 = q^2 x_1$; $x_4 = q^3 x_1$

Тогда рассмотренные выше системы можно записать в виде:

$\begin{cases} x_1(1+q) = 4 \\ x_1^2 \cdot q = A \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 \cdot q^2(1+q) = 36 \\ x_1^2 \cdot q^5 = B \end{cases}$

Подставим выражения первой системы во вторую $\Rightarrow$ $x_1(1+q) \cdot q^2 = 36 \Rightarrow 4q^2 = 36 \Rightarrow q^2 = 9$

По условию, члены последовательности больше нуля $\Rightarrow$ $q = 3$, тогда $x_1 = \frac{4}{1+q} = 1$.

$A = x_1^2 \cdot q \Rightarrow A = 1 \cdot 3 = 3$

$B = x_1^2 \cdot q^5 \Rightarrow B = 1 \cdot 3^5 = 243$

Ответ: $A = 3$; $B = 243$

+

№3

$y=2\sin^2\frac{x}{2}$; $y'=4\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$

$y'=\sin x$; $y''=\cos x$; $y'''=-\sin x$; $y''''=-\cos x$

$y'''''=\sin x$ и т.д.

$2019:3 \Rightarrow (y^{(2019)})=y'''=-\sin x$

Ответ: производная 2019-го порядка функции y равна $-\sin x$.

+

№4

$$\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=\sqrt{\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1}$$

Найдем ОДЗ данного ~~выр~~ уравнения

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2018}\geq\frac{1}{2}\\ \cos x\geq\frac{1}{2}\\ \cos\frac{x}{2018}+\cos x\geq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{2018}\in[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k], k\in\mathbb{Z}\\ x\in[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n], n\in\mathbb{Z}\\ 2\cos\frac{2019x}{4036}\cos\frac{2017x}{4036}\geq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in[-\frac{2018\pi}{3}+4036\pi k;\frac{2018\pi}{3}+4036\pi k], k\in\mathbb{Z}\\ \cos\frac{2019x}{4036}\cos\frac{2017x}{4036}\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}+2\sqrt{(\cos x-\frac{1}{2})(\cos\frac{\pi}{2018}-\frac{1}{2})}+\cos x-\frac{1}{2}=\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1$$

$$2\sqrt{(\cos x-\frac{1}{2})(\cos\frac{\pi}{2018}-\frac{1}{2})}=0$$

$$(\cos x-\frac{1}{2})(\cos\frac{\pi}{2018}-\frac{1}{2})=0$$

$\cos\frac{x}{2018} = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2018} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in Z$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \pm\frac{2018\pi}{3} + 4036\pi k, k \in Z$

С учетом области определения

$x_k = \frac{2018\pi}{3} + 4036\pi k, k\in Z$ или $x_m = -\frac{2018\pi}{3} + 4036\pi m, m \in Z$

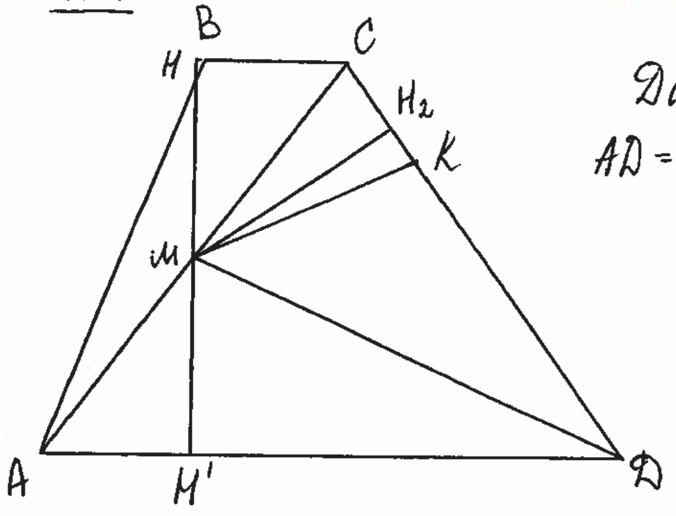
Проверка: при данных значениях

$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2018} = \frac{1}{2}\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \cos\frac{x}{2018} + \cos x - 1 \geq 0$

Ответ: $x_k = -\frac{2018x}{3} + 4036\pi k, k \in Z$

$x_n = \frac{2018x}{3} + 4036\pi n, \cancel{k}\ n \in Z.$

№5



Дано: ABCD - трапеция
AD = 4BC ; KD = 3CK ; AM = MC

Найти: $S_{MKD} : S_{ABCD}$

Решение.

① Проведем высоту трапеции ABCD HH' через точку. $\Delta MHC = \Delta MH'A$ (по 2му признаку) => HM = MH'.

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot HH' = \frac{4BC+BC}{2} HH' = \frac{5BC\cdot HH'}{2}$

② Рассмотрим $\triangle ACD$. $S_{ACD} = \frac{AD}{2} \cdot HH' = 2BC \cdot HH'$

$S_{ACD} = S_{CMD} + S_{AMD}$
$S_{AMD} = \frac{AD}{2} \cdot MH' = \frac{AD}{2} \cdot \frac{HH'}{2}$ $\Bigg| \Rightarrow S_{ACD} = S_{CMD} + \frac{AD \cdot HH'}{4} = S_{CMD} + BC \cdot HH'$

$S_{CMD} = S_{ACD} - BC \cdot HH' = 2BC \cdot HH' - BC \cdot HH'$

$S_{CMD} = BC \cdot HH'$

③ Проведем высоту MH_2 к стороне DC.
Рассмотрим $\triangle CMK$ и $\triangle DMK$

$S_{CMK} = \frac{CK}{2} \cdot MH_2$

$S_{DMK} = \frac{DK}{2} \cdot MH_2$, т.к $DK = 3CK$ (по условию), то $S_{DMK} = 3 \cdot \frac{CK}{2} \cdot MH_2$

$S_{DMK} = 3 S_{CMK}$

$S_{DMK} + S_{CMK} = S_{CMD} \Rightarrow S_{DMK} = S_{CMD} \cdot \frac{3}{4}$

из ② известно, что $S_{CMD} = BC \cdot HH' \Rightarrow S_{DMK} = \frac{3 \cdot BC \cdot HH'}{4}$.

④ $S_{ABCD} = \frac{5BC \cdot HH'}{2}$ (из ①)
$S_{MKD} = \frac{3BC \cdot HH'}{4}$ (из ③) $\Bigg| \Rightarrow \frac{S_{MKD}}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot BC \cdot HH' \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot BC \cdot HH'} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Ответ: $S_{MKD} : S_{ABCD} = 3 : 10 = 0,3$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

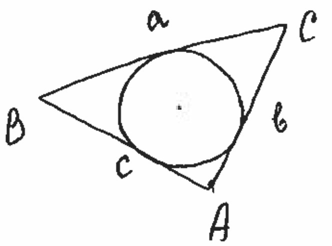
ШИФР 4 4 6 3 4

№ 6

$$\begin{cases} x^6 + y^6 + z^6 = 1 \\ 3x^3 + 5y^3 - 4z^3 = \sqrt{213} \end{cases}$$

Пусть $x^3 = a$; $y^3 = b$; $z^3 = c$, тогда

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ 3a + 5b - 4c = \sqrt{213} \end{cases}$$



a; b; c - стороны описанного $\triangle ABC$ около окружности с $R = 1$.

По теореме косинусов $\frac{a + b - c}{2ba} = \cos C$

$\mp$