ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a\cdot b)c=a(b c)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 1 2 5

Класс 11 Вариант 41 Дата Олимпиады 09.02.2019г.

Площадка написания г. Южно-Сахалинск

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	15	20	20	85	восемьдесят пять	

№1

1) Преобразуем для начала числитель.

Заметим, что $38+17\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^3$, а $38-17\sqrt{5}=$
$=(2-\sqrt{5})^3$. Значит числитель преобразуется в:

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3}=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4.$$

2) Теперь преобразуем знаменатель.

Заметим, что $(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)=1+3x+3\sqrt{x}+x\sqrt{x}=$
$=(1+\sqrt{x})^3$.

а $\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)=x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3x-1=(\sqrt{x}-1)^3$

Значит знаменатель преобразуется в:

$$\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^3}=(1+\sqrt{x})-(\sqrt{x}-1)=2$$

3) ~~Это~~ Из 1) и 2) следует, что $A=\frac{4}{2}=2$ и A не зависит от x

Ответ: $A=2$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 1 2 5

№2

1) У нас есть 2 уравнения.

$A = 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + A = 0$, корни которого x_1, x_2.

$B = 36x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 36x + B = 0$, корни которого x_3, x_4.

По теореме Виета для двух уравнений получим 4 равенства:

$x_1 + x_2 = 4$ (1)

$x_1 x_2 = A$ (2)

$x_3 + x_4 = 36$ (3)

$x_3 x_4 = B$ (4)

2) По условию x_1, x_2, x_3, x_4 – ~~гео~~ геометрическая последовательность. Пусть q – ее знаменатель. Тогда их можно представить в виде $x_1,\ x_1 q,\ x_1 q^2,\ x_1 q^3$ ($q > 0$, $q \neq 1$)

Тогда (1) и (3) преобразуются в:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 q = 4 \\ x_1 q^2 + x_1 q^3 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(q+1) = 4 \\ x_1 q^2 (q+1) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow q^2 = 9,$$ так как $q \neq -1$ и $x_1 \neq 0$. $q_1 = 3$, $q_2 = -3$. Но так как x_1, x_2, x_3, x_4 положительные, то $q = 3$.

$x_1 + 3x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$. $x_2 = 3$, $x_3 = 9$, $x_4 = 27$.

Из (2) находим $A = x_1 x_2 = 3$

Из (4) – $B = 9 \cdot 27 = 243$

Ответ: $A = 3$; $B = 243$ (+)

№ 3

1) $y=2\sin^2\frac{x}{2}$. $D(y)=(-\infty;+\infty)$

$y^{(1)}=2\cdot 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin x$

$y^{(2)}=\cos x$; $y^{(3)}=-\sin x$; $y^{(4)}=-\cos x$; $y^{(5)}=\sin x$.

Заметим, что производная $(4n+1)$-ого порядка равна $\sin x$ (где $n\in Z$)

Значит $y^{(2017)}=\sin x$.

$y^{(2018)}=\cos x$; $y^{(2019)}=-\sin x$

Ответ: $y^{(2019)}=-\sin x$ (+)

№ 4

$$\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=\sqrt{\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1}$$

I) Пусть $\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}=x$, $\cos x-\frac{1}{2}=y$. Тогда уравнение примет вид:

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$

Такое уравнение имеет только решение $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}y=0\\x\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$,

так как если возвести в квадрат обе части (учитывая, что $x\geq 0$ и $y\geq 0$) получим $2\sqrt{xy}=0$

II) Решим данную совокупность.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}=0\\ \cos x-\frac{1}{2}\geq 0\end{cases} (1)\\ \begin{cases}\cos x-\frac{1}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}\geq 0\end{cases} (2)\end{array}\right.$$

1) Решим для начала систему (1).

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2018}=\frac{1}{2}\\ \cos x\geq\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\frac{x}{2018}=\pm\frac{\pi}{3}} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2018\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right), \text{ где } k\in Z\\ x=2018\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\end{array}\right.\\ \cos x\geq\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}+672\pi+2\pi k\\ x=-\frac{2\pi}{3}+672\pi+2\pi k\end{array}\right.\\ \cos x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$

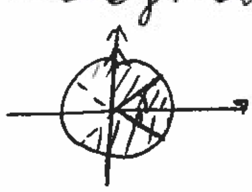
– при таких x $\cos x<0$, значит эта система (1) не имеет решений

2) Решим систему (2)

$$\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos\frac{x}{2018}\geq\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \text{ где } k\in Z\end{array}\right.\\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq\frac{x}{2018}\leq\frac{\pi}{3}+2\pi n, \text{ где } n\in Z\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.\\ -\frac{2\pi}{3}-672\pi+2\pi n\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+672\pi+2\pi n\end{cases}$$

Обозначим это на единичной окружности



Углы, соответствующие равенствам, обозначены дугами, а неравенству – штриховкой. Видим, что решениями данной системы, а из 1) следует, что и исходного уравнения, являются $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi p$, $x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi z$, где $p, z\in Z$

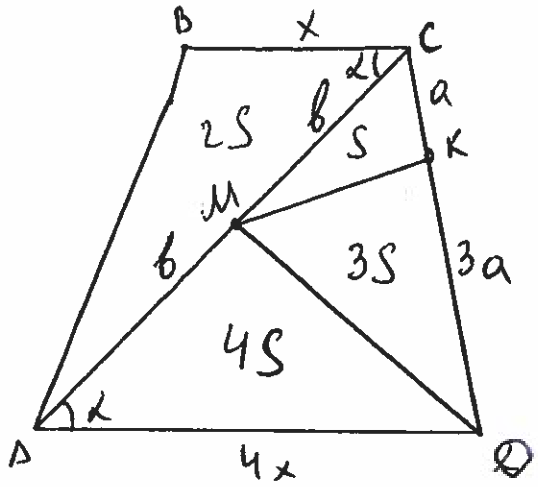
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 1 2 5

№ 5



Пусть $BC = x$, тогда $AD = 4x$, $CK = a$, тогда $KD = 3a$, $AM = MC = b$, $\angle BCA = \angle CAD = \alpha$ (так как они накрест лежащие при пересечении $BC \parallel AD$ и секущей AC. У $\triangle CMK$ и $\triangle KMD$ будет общая высота к CD. Значит их площади относятся как $CK : KD = 1:3$. То есть если площадь $\triangle CMK$ равна S, то площадь $\triangle KMD$ – $3S$. В $\triangle ADC$ DM – медиана. Значит площади $\triangle AMD$ и $\triangle CMD$ равны. $S_{AMD} = S_{CMD} = 4S$. Площадь $\triangle BCA$ равна $S_{BCA} = \frac{1}{2} x \cdot 2b \cdot \sin\alpha$, а площадь $\triangle CAD$ равна $S_{CAD} = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 4x \cdot \sin\alpha$. То есть $S_{BCA} = \frac{1}{4} S_{CAD} = \frac{1}{4} \cdot (S + 3S + 4S) = 2S$.

Площадь трапеции $S_{ABCD} = 2S + 8S = 10S$

Значит $\frac{S_{MKD}}{S_{ABCD}} = \frac{3S}{10S} = 0,3$ – что и требовалось найти.

Ответ: $\frac{S_{MKD}}{S_{ABCD}} = 0,3$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 1 2 5

№6

$$\begin{cases} x^6+y^6+z^6=1 & (1) \\ 3x^3+5y^3-4z^3=\sqrt{213} & (2) \end{cases}$$

В (1) равенстве переменные стоят в чётной степени. Значит x^6, y^6, z^6 не могут быть больше 1. Значит $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$, $z\in[-1;1]$

Рассмотрим выражение $3x^3+5y^3-4z^3$. При $x=1$, $y=1$, $z=-1$ ~~это вы~~ оно принимает значение 12. А так как $\sqrt{213}<15$, то $12<\sqrt{213}$. Но даже такие x, y и z не могут достигаться из-за (1) выражения. То есть $3x^3+5y^3-4z^3<\sqrt{213}$ при $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$, $z\in[-1;1]$. То есть исходная система не будет иметь решений.

Ответ: нет решений

+