

ШИФР 6070

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	

n 1

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$$

$$(x^2-3x-x+3)(x-5) = x^3-9x$$

$$(x^2-4x+3)(x-5) = x^3-9x$$

$$x^3-5x^2-4x^2+20x+3x-15 = x^3-9x$$

$$-9x^2+32x-15=0$$

$$9x^2-32x+15=0$$

$$D = 1024-540 = 484; \sqrt{D} = 22$$

$$x_1 = \frac{32+22}{18} = 3$$

$$x_2 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Ответ: $\frac{5}{9}; 3$

n 2

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1})^2 = 4$$

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}+3x+1=4$$

$$4x+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4$$

$$2x+\sqrt{(x-1)(3x+1)}=2$$

$$\sqrt{(x-1)(3x+1)}=2-2x$$

$$\begin{cases} 2-2x \geq 0 \\ (x-1)(3x+1) = (2-2x)^2 \end{cases}$$

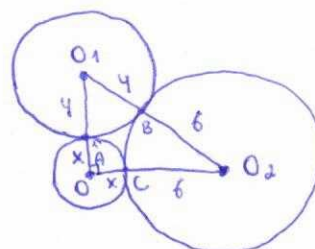
$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2+x-3x-1 = 4-8x+4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x=1 \Rightarrow x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

$x=1$ удовлетворяет ОДЗ

Ответ: 1



Решение:

Пусть $O_1A = O_2B = x$, тогда $O_1O_2 = 10$
 $O_1O_2 = 4+x$, $O_2O_1 = 6+x$. Из ΔO_1O_2A по теореме Пифагора

$$100 = (4+x)^2 + (6+x)^2$$

$$x^2+8x+16+x^2+12x+36=100$$

$$2x^2+20x-48=0$$

$$x^2+10x-24=0$$

$$D = 100+96 = 196; \sqrt{D} = 14$$

$$x_1 = \frac{-10-14}{2} < 0 - \text{не удовл. усл.}$$

$$x_2 = \frac{-10+14}{2} = 2$$

$z = 2 \text{ см}$

Ответ: 2 см



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

6070

~ 3

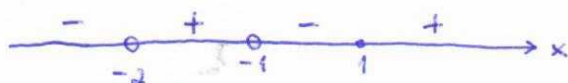
$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$$

~ 4

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{6+3+2}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{3}$$

~ 5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

$$8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0 \quad \text{Пусть } 2^x = t, \text{ тогда}$$

$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$$

$$8t^2 - 6t + 1 = 0; \Delta = 36 - 32 = 4; \sqrt{\Delta} = 2; t_1 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$$

$$t \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}] \quad \text{Вернемся к замене}$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^{-1}$$

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$\text{Ответ: } [-2; -1]$$

~ 6

Пусть антирешных кошек было x , тогда: антирешная антирешная перигешная маленькая. Всего: $3x-13$ x $3x$ $2x$ $кошек$

Составим и решим уравнение

$$3x - 13 + x + 3x + 2x = 77$$

$$9x = 90$$

$$x = 10 \quad (10 \text{ антирешных, } 20 \text{ маленьких, } 30 \text{ перигешных, } 17 \text{ антирешных})$$

Ответ: 10 антирешных; 20 маленьких; 30 перигешных; 17 антирешных

~ 9

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \lg x + \lg y = \lg(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x + \lg(\frac{\pi}{4} - x) = 3 - 2\sqrt{3} \quad (2) \end{cases}$$

Решим (2)

$$\lg x + \frac{\lg \frac{\pi}{4} - \lg x}{1 + \lg \frac{\pi}{4} \lg x} = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$\lg x + \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} = 3 - 2\sqrt{3}; \quad \lg x \neq -1$$

$$\lg x + \lg^2 x + 1 - \lg x = (1 + \lg x)(3 - 2\sqrt{3})$$

$$\lg^2 x + 1 = 3 - 2\sqrt{3} + 3\lg x - 2\sqrt{3}\lg x$$

$$\lg^2 x + 2\sqrt{3}\lg x - 3\lg x + 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$\lg^2 x + (2\sqrt{3} - 3)\lg x + 2\sqrt{3} - 2 = 0 \quad \text{Пусть } \lg x = t$$

$$t^2 + (2\sqrt{3} - 3)t + 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{3} - 3)^2 - 4(2\sqrt{3} - 2) = 12 - 12\sqrt{3} + 9 - 8\sqrt{3} + 8 = 29 - 20\sqrt{3} = \sqrt{841} - \sqrt{1200} < 0$$

корней нет

$x \in \emptyset$, тогда $y \in \emptyset$

Ответ: $\emptyset$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

6070

№ 7

Если числа образуют арифметическую прогрессию, то

$$\lg(2^x - 1) - \lg 2 = d$$

$$\lg(2^x + 1) - \lg(2^x - 1) = d. \text{ Тогда имеем: } \lg 2 = d$$

$$\lg(2^x - 1) - \lg 2 = \lg(2^x + 1) - \lg(2^x - 1)$$

$$\lg \frac{2^x - 1}{2} = \lg \frac{2^x + 1}{2^x - 1}. \text{ Пусть } 2^x = t$$

$$\text{ОЗЗ: } t - 1 > 0; t > 1, \text{ тогда}$$

$$\frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\frac{t-1}{2} - \frac{t+1}{t-1} = 0$$

$$\frac{(t-1)^2 - 2(t+1)}{2(t-1)} = 0; \begin{cases} t \neq 1 \\ t^2 - 2t + 1 - 2t - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \neq 1 \\ t^2 - 4t - 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} t \neq 1 \\ t = 2 + \sqrt{5} \\ t = 2 - \sqrt{5} < 0 - \text{не удовл. ОЗЗ} \end{cases}$$

$$t = 2 + \sqrt{5}$$

Вернемся к замене: $2^x = 2 + \sqrt{5}$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

$$\text{Ответ: } \log_2(2 + \sqrt{5}); \log_2(\sqrt{5})$$

~ 10

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$$

$$\begin{aligned} A^3 + 3A &= A(A^2 + 3), \text{ тогда } (\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})((\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2})^2 + 3) = \\ &= ((\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}})((\sqrt{5} + 2)^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{5 - 4} + (\sqrt{5} - 2)^{\frac{2}{3}} + 3) = \\ &= ((\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}})((\sqrt{5} + 2)^{\frac{2}{3}} + 1 + (\sqrt{5} - 2)^{\frac{2}{3}}) = ((\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{3}})^3 - ((\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}})^3 = \\ &= \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 4$$

$$\lg(2^x - 1); \lg 2; \lg(2^x + 1)$$

$$\lg 2 - \lg(2^x - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 2$$

$$\text{Пусть } 2^x = t, t > 1$$

$$\frac{2}{t-1} = \frac{t+1}{2}; t^2 - 1 = 4; t^2 = 5; \begin{cases} t = \sqrt{5} \\ t = -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Вернемся к замене: } 2^x = \sqrt{5}; x = \log_2(\sqrt{5})$$

$$\lg 2; \lg(2^x + 1); \lg(2^x - 1)$$

$$x \in \emptyset$$

$$\lg(2^x - 1); \lg(2^x + 1); \lg(2)$$

$$x \in \emptyset$$

$$\lg(2^x + 1); \lg 2; \lg(2^x - 1)$$

$$x = \log_2(\sqrt{5})$$

$$\lg(2^x + 1); \lg(2^x - 1); \lg 2$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$