

**ШИФР**

5995

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.2.17

Площадка написания КНКТУ

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7           | 8  | 9  | 10 | $\Sigma$    |                                             | Подпись |
|--------|---|---|---|---|----|---|-------------|----|----|----|-------------|---------------------------------------------|---------|
|        |   |   |   |   |    |   |             |    |    |    | Цифрой      | Прописью                                    |         |
| Оценка | 5 | 5 | 5 | 5 | 10 | 8 | 5+<br>+5=10 | 12 | 12 | 20 | 8+5=<br>=92 | восемьдесят<br>четыре<br>= девяносто<br>два | Белу-   |

№1

$$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$$

$$(x^2+2x)^2-4=5$$

$$(x^2+2x)^2=9$$

$$(x^2+2x)=3$$

$$x^2+2x=-3$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$x^2+2x+3=0 \rightarrow D < 0$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

Ответ:  $x=1$ ;  $x=-3$

№2

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$$

$$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x$$

$$2\sqrt{2x^2-6x+x-3}=x+2$$

$$4(2x^2-5x-3)=x^2+4x+4$$

$$8x^2-20x-12=x^2+4x+4$$

$$7x^2-24x-16=0 \quad (\text{формула реш. котр.})$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144+112}}{7} = \frac{12 \pm 16}{7}$$

$$x_1=4$$

$$x_2 = -\frac{4}{7} \quad (\text{не угод. ОДЗ})$$

Ответ:  $x=4$

ОДЗ

$$x \geq 3$$

№3

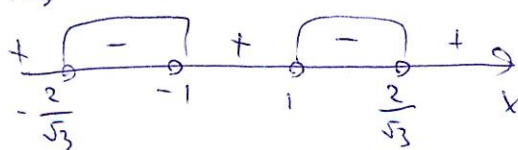
$$\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{3(x+\frac{2}{\sqrt{3}})(x-\frac{2}{\sqrt{3}})}{(x+1)(x-1)} < 0$$

$$(\frac{2}{\sqrt{3}} > 1, \text{ т.к. } 4 > 3)$$



Ответ:  $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1) \cup (1; \frac{2\sqrt{3}}{3})$

№4

$$\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\log_4(2x^2 - 2x + 3x - 3) = 2 - \log_4 16 + \log_4 3$$

$$\log_4(2x^2 + x - 3) = \log_4 3$$

$$2x^2 + x - 3 = 3$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -2 \text{ (по ур. 2D3)}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3}{2}$$

№5

$$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$$

$$2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 > 0$$

$$(2^x + 4)(2^x - 1) > 0$$

Т.к.  $g(x) = 2^x > 0$  для  $\forall x$ ,  
то  $(2^x + 4)$  на знак не влияет

$$2^x - 1 > 0$$

$$2^x > 1 \text{ (основание } 2 > 1)$$

$$x > 0$$

$$\text{Ответ: } x > 0$$

№6

|         | A    | B    | C    | $\Sigma$                              |
|---------|------|------|------|---------------------------------------|
| мат.    | 4x   | 3x   | 6x   | 13x                                   |
| действ. | 4x+4 | 3x+5 | 6x+6 | $13x \cdot (100\% + 7\frac{9}{13}\%)$ |

Пусть по плану в А пришло бы 4x чел., тогда  
Остальные распределяются — по таблице.

$$7\frac{9}{13}\% = \frac{100}{13}\% = \frac{1}{13}$$

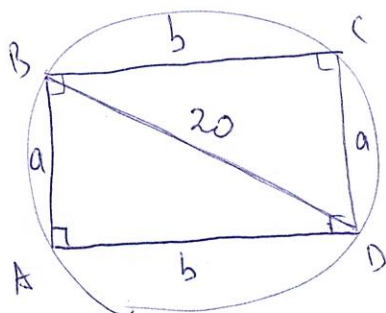
В действ-ти пришло  $4x + 3x + 6x + 4 + 5 + 6 = 13x + 15$ , а должно было 13x.

$$\text{Известно, что } 13x + 15 = 13x \cdot \left(1 + \frac{1}{13}\right) = 14x \Rightarrow x = 15$$

Тогда в действ-ти в А пришло  $4x + 4 = 64$ , B — 50, C — 96 чел.

$$\text{Ответ: } \left. \begin{array}{l} A - 64 \text{ чел.} \\ B - 50 \text{ чел.} \\ C - 96 \text{ чел.} \end{array} \right\}$$

№8



дано:

круг  $R = 10$  см  
 вписан прямоугол. ABCD

$$S_{\text{пр}} = \frac{1}{2} S_{\text{кр}}$$

AB = ?

AD = ?

$$\begin{aligned}
 & \frac{50\pi}{\sqrt{200 - 10\sqrt{400 - 25\pi^2}}} = \\
 & = \frac{50\pi \sqrt{200 + 10\sqrt{400 - 25\pi^2}}}{\sqrt{40000 - 40000 + 2500\pi^2}} = \\
 & = \sqrt{200 + 10\sqrt{400 - 25\pi^2}}
 \end{aligned}$$

решение:

AB = a см, AD = b см.

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = 100\pi \text{ см}^2$$

Т.к.  $\angle BAD = 90^\circ$ , то BD — диам.  $\Rightarrow BD = 2R = 20$  см.

по т. Пифаг. ( $\triangle ABD$ )  $a^2 + b^2 = 400$

$$S_{\text{пр}} = ab = \frac{1}{2} S_{\text{кр}} = 50\pi \text{ см}^2 \Rightarrow b = \frac{50\pi}{a} \text{ см}$$

$$a^2 + b^2 = 400$$

$$a^2 + \frac{2500\pi^2}{a^2} = 400$$

$$a^4 - 400a^2 + 2500\pi^2 = 0$$

$$a_{1/2}^2 = \frac{200 \pm \sqrt{40000 - 2500\pi^2}}{1} = 200 \pm 10\sqrt{400 - 25\pi^2}$$

$$a_{1/2} = \sqrt{200 \pm 10\sqrt{400 - 25\pi^2}}$$

$$b_{1/2} = \frac{50\pi}{a_{1/2}}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a_1 = \sqrt{200 + 10\sqrt{400 - 25\pi^2}} \\ b_1 = \sqrt{200 - 10\sqrt{400 - 25\pi^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = b_1 \\ b_2 = a_1 \end{cases}$$

Ответ: стороны прямоугол. —  $\sqrt{200 + 10\sqrt{400 - 25\pi^2}}$  и  $\sqrt{200 - 10\sqrt{400 - 25\pi^2}}$

стр. 3

№9

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$\sin x = a, \cos y = b, |a| \leq 1, |b| \leq 1$

$$\begin{cases} a+b = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ ab = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$b = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - a$$

$$ab = a\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - a\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

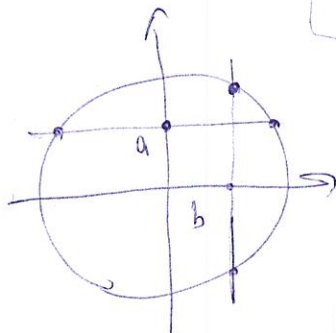
$$-a^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{2}a = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 - \frac{1-\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$4a^2 - 2(1-\sqrt{3})a - \sqrt{3} = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{1-\sqrt{3} \pm \sqrt{1+3-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{4} = \frac{1-\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$$

$$b_{1/2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - a_{1/2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{4} \mp \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} = \frac{1-\sqrt{3} \mp \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4}$$



$$\frac{1-\sqrt{3} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} < 1$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} < 3+\sqrt{3}$$

$$4+2\sqrt{3} < 12+2\sqrt{3}$$

$$\frac{1-\sqrt{3} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} > -1$$

$$5-\sqrt{3} > \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$25-10\sqrt{3} > 4+2\sqrt{3}$$

$$24 > 12\sqrt{3}$$

$$2 > \sqrt{3}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_8 = x_2 \\ y_8 = -y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = \pi - x_2 \\ y_6 = y_2 \\ x_7 = \pi - x_2 \\ y_7 = -y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_1 \\ y_5 = -y_1 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin \frac{1-\sqrt{3} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y_1 = \arccos \frac{1-\sqrt{3} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \arcsin \frac{1-\sqrt{3} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y_2 = \arccos \frac{1-\sqrt{3} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \pi - x_1 \\ y_3 = y_1 \\ x_4 = \pi - x_1 \\ y_4 = -y_1 \end{cases}$$

стр. 4

$\sqrt{7}$

$$a_0, a_1, \dots, a_{12}$$

$$a_0 = 1, \quad a_4 + a_8 = 6$$

Пусть  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , тогда

$$a_0 = q^0, \quad a_1 = q, \dots, a_n = q^n$$

$$a_4 + a_8 = q^4 + q^8 = 6$$

$$q^8 + q^4 - 6 = 0$$

$$(q^4 + 3)(q^4 - 2) = 0$$

$$q^4 = 2 \Rightarrow q = \sqrt[4]{2}$$

$$S_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = a_0 (q^n + q^{n-1} + \dots + q^0)$$

$$S_{13} = \frac{q^{14} - 1}{q - 1} = \frac{2^{3.5} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{7(\sqrt[4]{2} + 1)}{2 - 1} = 7\sqrt[4]{2} + 7 = \frac{(q^{13} - 1)(q + 1)}{q^2 - 1} = \frac{(q^{13} - 1)(q^2 + 1)(q + 1)}{q^4 - 1} =$$

$$\frac{q^{16} + q^{15} + q^{14} + q^{13} - q^3 - q^2 - q - 1}{q^4 - 1}$$

Ответ:  $7 + 7\sqrt[4]{2}$  или  $7 - 7\sqrt[4]{2}$

$$1) q = -\sqrt[4]{2}, \quad S_{13} = \frac{-8\sqrt[4]{2} - 1}{-\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{8\sqrt[4]{2} + 1}{\sqrt[4]{2} + 1} = (8\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt[4]{2} - 1) = 16 + \sqrt[4]{2} - 8\sqrt[4]{2} - 1 = 15 - 7\sqrt[4]{2}$$

$$2) q = \sqrt[4]{2}, \quad S_{13} = \frac{8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} \quad \text{Ответ:}$$

$$1) q = \sqrt[4]{2}, \quad S_{13} = \frac{16 + 8\sqrt[4]{2}^3 + 8\sqrt[4]{2} + 8\sqrt[4]{2}^4 - \sqrt[4]{2}^3 - \sqrt[4]{2}^2 - \sqrt[4]{2} - 1}{1} = 15 + 7\sqrt[4]{2}^3 + 7\sqrt[4]{2} + 7\sqrt[4]{2}$$

$$2) q = -\sqrt[4]{2}, \quad S_{13} = \frac{16 - 8\sqrt[4]{2}^3 + 8\sqrt[4]{2} - 8\sqrt[4]{2}^4 + \sqrt[4]{2}^3 - \sqrt[4]{2}^2 + \sqrt[4]{2} - 1}{1} = 15 - 7\sqrt[4]{2}^3 + 7\sqrt[4]{2} - 7\sqrt[4]{2}$$

№10  $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = ? = t + \frac{2}{t}$

Пусть  $t = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$

$$\frac{2}{t} = \frac{2}{\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}} = \frac{2 \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

Пусть  $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = X$

$$t + \frac{2}{t} = x$$

$$t^3 + \frac{8}{t^3} + \left(6t + \frac{12}{t}\right) = x^3$$

$$t^3 + \frac{8}{t^3} + 6x = x^3$$

$$x^3 - 6x - (20 + \sqrt{392} + 20 - \sqrt{392}) = 0$$

$$x^3 - 6x - 40 = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$(x-4)(x^2+4x+10) = 0$$

$D < 0$

Значит единственный корень — 4.

$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 4$$

Ответ: 4

(Упростим данное в условии выражение до выражения без радикалов и получим число 4. Значит 4 — это упрощенный вид выражения и рз-тая его вычислить)