

ШИФР 3076

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11. февраля 2017 год

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	

N1.

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x-3)/(x+3)$$

$$(x-3)(x^2-6x+5 - x^2-3x) = 0$$

$$(x-3)(-9x+5) = 0 \quad \checkmark$$

$$\boxed{x=3, \quad x=\frac{5}{9}}$$

Ответ: $x=3, \frac{5}{9} \quad \checkmark$

N2.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2.$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{3x+1}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3x+1} \geq 0 \quad (\text{чтобы возводить в квадрат})$$

$$\sqrt{3x+1} \leq 2$$

$$3x+1 \leq 4$$

$$\boxed{x \leq 1} \quad (2). \quad \checkmark$$

$$x-1 = 4 - 2\sqrt{3x+1} + 3x+1$$

$$2\sqrt{3x+1} = 4 + 3x+1 - x+1$$

$$2\sqrt{3x+1} = 3+x \quad \checkmark$$

$$4(3x+1) = 9+6x+x^2$$

$$x^2 + 3x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-32}}{2}$$

Ответ: $x=1. \quad \checkmark$

$$12x+4 = x^2+6x+9$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2} = 1; 5. \quad \checkmark$$

Но $x \geq 1$ и $x \leq 1 \Rightarrow x=1.$ (с учетом п. (1) и п. (2), $\checkmark$)

№3

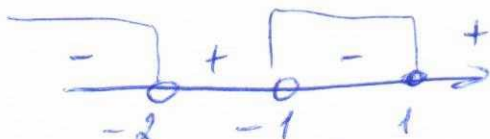
$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \quad \checkmark$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1] \quad \checkmark$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$.

№4.

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12} \quad \checkmark$$

$$6 \log_3 x + 3 \log_3 x + 2 \log_3 x = \frac{11}{2} \quad \checkmark$$

$$11 \log_3 x = \frac{11}{2}$$

$$\begin{cases} \log_3 x = \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

Ответ: $x = \sqrt{3}$.

№5.

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

Пусть $2^x = t > 0$, тогда

$$\begin{cases} 8t^2 + 1 \leq 6t \\ t > 0 \end{cases}$$

$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0 \quad \checkmark$$

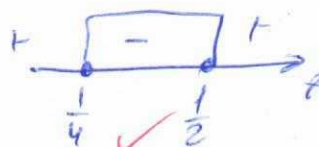
$$t = \frac{6 \pm 2}{16} = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$$

$$t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \quad \checkmark$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^{-1}$$

$$\Rightarrow x \in [-2; -1]$$

Ответ: $x \in [-2; -1]$ ✓



№6.

Пусть кол-во сибирской породы — a ,
ангорской н-гоп — b ,
персидской н-гоп — c ,
сиамской н-гоп — d .

Тогда

$$\begin{cases} d = 2b \\ c = 1.5d \\ a + 13 = c \\ a + b + c + d = 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3b \\ a = 3b - 13 \\ 3b - 13 + b + 3b + 2b = 77 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$9b = 90$$

$$b = 10 \Rightarrow \text{ангорской породы } 10 \text{ кошек}$$

$$c = 3b = 3 \cdot 10 = 30 \Rightarrow \text{персидской } 30 \text{ кошек.} \quad \checkmark$$

$$a = 3b - 13 = 30 - 13 = 17 \Rightarrow \text{сибирской } 17 \text{ кошек}$$

$$d = 2b = 20 \Rightarrow \text{сиамской } 20 \text{ кошек.}$$

ШИФР 3076

Ответ: 10 ангорской породы; 30 персидской;
 17 сибирской л-го; 20 сямской. ✓
 №6 (продолжение)

для $\lg 2, \lg(2^x - 1), \lg(2^x + 1)$ Ариф. прогрессия.

Пусть $2^x = t > 0$ ОДЗ: $t > 1$.

Т.к. ариф. прогрессия.

$$\Rightarrow \lg(t-1) - \lg 2 = \lg(t+1) - \lg(t-1)$$

$$\frac{t-1}{2} = \frac{t+1}{t-1}$$

$$t^2 - 2t + 1 = 2t + 2$$

$$t^2 - 4t - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$t = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$t > 0 \Rightarrow t = 2 + \sqrt{5}$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5}) \quad \checkmark$$

Ответ: $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - y \quad \text{N9.}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3} \quad \checkmark$$

ШИФР 3076

№9 (продолжение).

Пусть $\operatorname{tg} u = t$, тогда

$$\frac{1-t}{1+t} + t = 3 - 2\sqrt{3} \quad | \cdot (1+t) \neq 0$$

$$1 - \cancel{t} + \cancel{t} + t^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 3 + t - 2\sqrt{3}t$$

$$t^2 + t(2\sqrt{3} - 3) + 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$D = 4 \cdot 3 - 12\sqrt{3} + 9 - 8\sqrt{3} + 8 =$$

$$= 29 - 20\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{нет корней.} \quad \checkmark$$

$$t = \frac{\cancel{3-2\sqrt{3}} \pm \sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}$$

$\Rightarrow$ система не имеет решений. Ответ: нет решений.
№10. ✓

$$A^3 + 3A = -?$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{15+2} - \sqrt[3]{15-2}}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{15+2} - \sqrt[3]{15-2})(\sqrt[3]{(15+2)^2} + \sqrt[3]{5-4} + \sqrt[3]{(15-2)^2})}{\sqrt[3]{(15+2)^2} + 1 + \sqrt[3]{(15-2)^2}} =$$

$$= \frac{15+2 - 15+2}{\sqrt[3]{(15+2)^2} + 1 + \sqrt[3]{(15-2)^2}}$$

замечая, что

$$\sqrt{5+2} = \frac{1}{\sqrt{5-2}}$$

Пусть $\sqrt{5+2} = t$, тогда

$$A = \frac{4}{\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\frac{1}{t}} + 1}$$

Пусть $\sqrt[3]{15+2} = t$, тогда

$$\sqrt[3]{15-2} = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow A = t - \frac{1}{t} \quad \checkmark$$

ШИФР 3076

но (продолжение).

$$A = t - \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow A^3 + 3A = A(A^2 + 3)$$

$$\left(t - \frac{1}{t}\right) \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 + 3\right) = \left(t - \frac{1}{t}\right) \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right) \quad (1)$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt[3]{15+2} - \sqrt[3]{15-2}}{\frac{\sqrt[3]{(15+2)^2 + 1} + \sqrt[3]{(15-2)^2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{15+2} - \sqrt{15-2}}{t^2 + 1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{4}{t^2 + 1 + \frac{1}{t^2}}$$

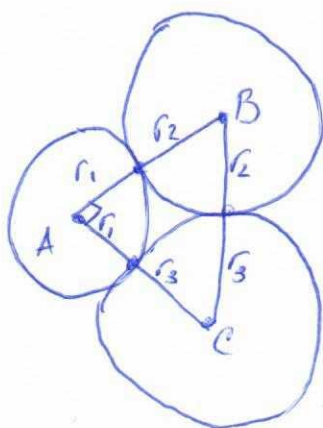
$$\Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 = \frac{4}{t - \frac{1}{t}} \quad (2)$$

$$(2) \text{ в } (1): \left(t - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{4}{t - \frac{1}{t}} = 4.$$

$$\Rightarrow A^3 + 3A = 4.$$

Ответ: 4. ✓

№8.



$$r_2 = 4$$

$$r_3 = 6$$

$$r_1 = ?$$

Все стороны треугольника ABC проходят через точку касания окружностей.

$$\Rightarrow AB = r_1 + r_2$$

$$BC = r_2 + r_3$$

$$AC = r_1 + r_3$$



$$(ab)c = a(bc)$$

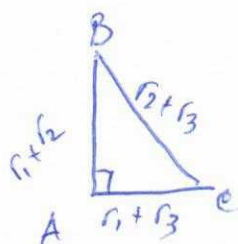
$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3076.

и 8 (продолжение).



$$(r_2 + r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2 + (r_1 + r_2)^2 \quad \checkmark$$

$$\cancel{r_2^2} + \cancel{r_3^2} + 2r_2r_3 = r_1^2 + \cancel{r_3^2} + 2r_1r_3 + r_1^2 + \cancel{r_2^2} + 2r_1r_2$$

$$r_2r_3 = r_1^2 + r_1r_3 + r_1r_2$$

Подставим r_2 и r_3

$$24 = r_1^2 + r_1(6+4)$$

$$r_1^2 + 10r_1 - 24 = 0$$

$$r_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 96}}{2} = \frac{-10 \pm 14}{2} = 2; -12.$$

$$r_1 > 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 2.$$

Ответ: 2. $\checkmark$