ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 9 5 2 6

Класс 11 Вариант 42 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания МОУ СОШ №1, г. Надым

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	10	20	30					90	Девяносто	

1. $A = \dfrac{\sqrt[3]{2(4+3x)+\sqrt{x}(12+x)} + \sqrt[3]{2(4+3x)-\sqrt{x}(12+x)}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}$, $x = 0{,}2018$

$A = \dfrac{\sqrt[3]{2(4+3x)+\sqrt{x}(12+x)} + \sqrt[3]{2(4+3x)-\sqrt{x}(12+x)}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt[3]{8+6x+12\sqrt{x}+x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8+6x-12\sqrt{x}-x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}}} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{(2+\sqrt{x})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^3}}{\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3}} = \dfrac{2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}} = -\dfrac{4}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ +

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. $p(x) = 6x-x^2$; $q(x) = 24x-x^2$; x_1, x_2 – корни ур. $p(x) = A$

x_1, x_2, x_3, x_4 - арифм. прогр. x_3, x_4 – корни ур. $q(x) = B$.

$6x - x^2 = A$ $\qquad$ $24x - x^2 = B$

$x^2 - 6x + A = 0$ $\qquad$ $x^2 - 24x + B = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = A \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x_3 + x_4 = 24 \\ x_3 \cdot x_4 = B \end{cases}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 + 24$

$S_{ар.пр.} = \frac{2x_1 + 3d}{2} \cdot 4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$4x_1 + 6d = 30$

$x_1 + x_2 = 6$, $x_2 = x_1 + d \rightarrow$

$2x_1 + d = 6$

$d = 6 - 2x_1$

$4x_1 + 6(6 - 2x_1) = 30$

$4x_1 + 36 - 12x_1 = 30$

$8x_1 = 6$

$x_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$d = 6 - \frac{3}{2} \rightarrow d = 4{,}5$ $\qquad$ $B = x_3 \cdot x_4 = 9{,}75 \cdot 14{,}25 = 138{,}9375$

$x_3 = x_1 + 2d = 0{,}75 + 9 = 9{,}75$ $\qquad$ $A = x_1 \cdot x_2 = 0{,}75 \cdot 5{,}25 = 3{,}9375$

$x_2 = x_1 + d = 0{,}75 + 4{,}5 = 5{,}25$

$x_4 = x_1 + 3d = 0{,}75 + 13{,}5 = 14{,}25$

Ответ: $A = 3{,}9375$, $B = 138{,}9375$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 3 | 9 | 5 | 2 | 6 |

3. $y = 2\cos^2\frac{x}{2} = 2\cdot\frac{1+\cos x}{2} = 1+\cos x$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y''' = \sin x$

$y^{IV} = \cos x$

$2018 : 4 = 504$, ост. 2

$y^{(2018)} = -\sin x$, т.к.

$y^{(2019)} = -\cos x$.

Ответ: $-\cos x$.

4. $\sqrt{\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2}} = \sqrt{\cos\frac{x}{2019} + \cos x - \sqrt3} - \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt3}{2}}$;

$\cdot \cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2} \ge 0$; $\cdot \cos x \ge \frac{\sqrt3}{2}$

$\cos\frac{x}{2019} \ge \frac{\sqrt3}{2}$

$\cdot \cos x + \cos\frac{x}{2019} - \sqrt3 \ge 0$

$2\cos\left(\frac{1010}{2019}x\right)\cos\left(\frac{1009x}{2019}\right) \ge \sqrt3$

$\cos\frac{1010}{2019}x \cdot \cos\frac{1009}{2019}x \ge \frac{\sqrt3}{2}$

$\sqrt{\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2}} + \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt3}{2}} = \sqrt{\cos\frac{x}{2019} + \cos x - \sqrt3}$

$\left(\sqrt{\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2}} + \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt3}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\cos\frac{x}{2019} + \cos x - \sqrt3}\right)^2$

$\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2} + 2\sqrt{\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2}}\cdot\sqrt{\cos x - \frac{\sqrt3}{2}} + \cos x - \frac{\sqrt3}{2} = \cos\frac{x}{2019} + \cos x - \sqrt3$

$2\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt3}{2}\right)} = 0$

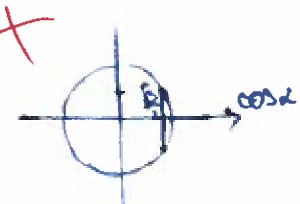
$\left(\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt3}{2}\right) = 0$

$\cos\frac{x}{2019} - \frac{\sqrt3}{2} = 0$ или $\cos x - \frac{\sqrt3}{2} = 0$

$\cos\frac{x}{2019} = \frac{\sqrt3}{2}$ $\qquad$ $\cos x = \frac{\sqrt3}{2}$

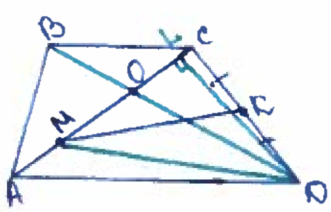
$\frac{x}{2019} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$x = \pm\frac{2019\pi}{6} + 4038\pi n, n\in\mathbb{Z}$.



Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{2019\pi}{6} + 4038\pi l, l\in\mathbb{Z}$.

5.



Дано: ABCD – трапеция ($AD \parallel BC$), $M \in AC$, $3AM = MC$, K – середина CD, $AD = 2BC$

Найти: $\frac{S_{AMCK}}{S_{ABCD}}$.

Решение.

1) Доп. постр.: MD; BD.

2) Рассм. $\triangle MCD$.

MK – медиана (K – серед. CD), то $S_{MCK} = S_{MKD} = \frac12 S_{MCD}$.

3) AC, BD – диагонали трапеции, то

$\triangle BOC \sim \triangle DOA$, $S_{\triangle BAO} = S_{\triangle COD}$, где O – точка пересеч. BD и AC.

$\cdot \triangle BOC \sim \triangle DOA$, то $\frac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = \left(\frac{BC}{AD}\right)^2 = \frac14$; $OC = \frac12 AO$

4) Рассм. $\triangle ACD$.

Проведём высоту DL.

$S_{ACD} = \frac12 DL\cdot AC$, $AC = AM + MC = \frac13 MC + MC = \frac43 MC$.

$S_{ACD} = S_{AMD} + S_{MCD} \to S_{AMD} = S_{ACD} - S_{MCD}$

2

$S_{AND} = \frac{1}{2} DL \cdot \frac{4}{3} MC - \frac{1}{2} DL \cdot MC = \frac{1}{2} DL \cdot MC \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{3} \cdot S_{MCD}.$

5) $OC = \frac{1}{2} AO \to OA = 2OC$

$AC = OC + AO = 3OC \to OC = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} MC = \frac{4}{9} MC.$

• Рассм. $\triangle COD$

$S_{COD} = \frac{1}{2} DL \cdot CO = \frac{1}{2} DL \cdot MC \cdot \frac{4}{9} = S_{MCD} \cdot \frac{4}{9}.$

• $S_{\triangle MCD} = S_{MOD} + S_{COD} \to S_{MOD} = S_{MCD} - \frac{4}{9} S_{MCD} = \frac{5}{9} S_{MCD}$

• $S_{\triangle AOD} = S_{MOD} + S_{AND} = \frac{5}{9} S_{MCD} + \frac{3}{9} S_{MCD} = \frac{8}{9} S_{MCD}$

• $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{AOD}} = \frac{1}{4} \to S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4} S_{AOD} = \frac{2}{9} S_{MCD}.$

6) $S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2 S_{COD} = \frac{2}{9} S_{MCD} + \frac{8}{9} S_{MCD} + 2 \cdot \frac{4}{9} S_{MCD} = \frac{18}{9} S_{MCD} = 2 S_{MCD}$

$S_{MCD} = 2 S_{MCK}$, то $S_{ABCD} = 4 S_{MCK}. \to \frac{S_{MCK}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4}.$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

6. $\begin{cases} x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1 \\ -2x^5 + y^5 + 5z^5 = \sqrt{315} \end{cases}$

• $x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1$, то $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1.$

• $-2x^5 + y^5 + 5z^5 = \sqrt{315}$ $| \cdot 2$

• $-4x^5 + 2y^5 + 10z^5 = 6\sqrt{35}$

$\begin{cases} x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1 \\ -4x^5 + 2y^5 + 10z^5 = 6\sqrt{35} \end{cases} + \to x^{10} - 4x^5 + y^{10} + 2y^5 + z^{10} + 10z^5 = 1 + 6\sqrt{35}$

$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$, то $-4x^5 \in [-4; 4]$, $2y^5 \in [-2; 2]$, $10z^5 \in [-10; 10]$.

$6\sqrt{35} \approx 35,5$, т.е. если вместо y, z подставить 1 - макс. значение этих переменных, а вместо $x = -1$, то

$4 + 2 + 10 \neq 6\sqrt{35}$, т.е решений нет.

Ответ: решений нет.