ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 5 0 2

Класс 10 А **Вариант** 41 **Дата Олимпиады** 9.02.2019

Площадка написания МОУ СОШ №1

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	5	20	16	24					80	восемьдесят	

№3

Пусть x т раб I
y – т раб II

Сост ур-е

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{1}{x+y} < 4 & (1) \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = 6 & (2) \end{cases}$$

Рассм (2) ур-е:

$\dfrac{x-y}{xy} = 6$; $\dfrac{x-y-6xy}{xy} = 0$

$x-y-6xy=0$; $6xy+y-x=0$

$y = \dfrac{x}{6x+1}$

Рассм ур 1 и подст y.

$0 < \dfrac{1}{x+\frac{x}{6x+1}} < 4$; $0 < \dfrac{1}{\frac{6x^2+x+x}{6x+1}} < 4$

$0 < \dfrac{6x+1}{6x^2+2x} < 4$; $6x+1 < 24x^2+8x$,

$24x^2+2x-1>0$; $24x^2+2x-1=0$; $D = 4+4\cdot 24=100$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 10}{48}$; $x_1 = \dfrac{1}{6}$; $x_2 = -\dfrac{12}{48} = -\dfrac{1}{4}$;

$(x-\frac{1}{6})(x+\frac{1}{4})>0$; $x \in (\frac{1}{6}; \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$

Ответ: $(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1 0 5 0 2

№2

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+1} \\ x^2+2y+1=0 \end{cases} \qquad \text{Н. у. } \begin{cases} y \neq -1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} x^2+x = y^2+y \\ x^2+2y+1=0 \end{cases}$$

$x - 2y - 1 = y^2 + y$

$x = y^2+3y+1$

$(y^2+3y+1)^2+2y+1=0$

$y^4+3y^3+y^2+3y^3+9y^2+3y+y^2+3y+1+2y+1=0$

$y^4+6y^3+11y^2+8y+2=0$

$2: \ \pm 1; \ \pm 2$

$y=-1$

$1-6+11-8+2=0$

	1	6	11	8	2
-1	1	5	6	2	0

$14 = 14$

	1	5	6	2
-1	1	4	2	0

$y^4+6y^3+11y^2+8y+2=(y+1)^2(y^2+4y+2)=0$

$y=-1$ не подх. н. у.

$y^2+4y+2=0$

$D=16-8=8$

$y_{1,2}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2}$

$y_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$

$y_1=-2-\sqrt{2}$

$x_1=4+4\sqrt{2}+2-6-3\sqrt{2}+1=\sqrt{2}+1$

$y_2=-2+\sqrt{2}$

$x_2=2-4\sqrt{2}+4+3\sqrt{2}-6+1=1-\sqrt{2}$

Ответ: $(1-\sqrt{2};\ -2+\sqrt{2});\ (\sqrt{2}+1;\ -2-\sqrt{2})$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 5 0 2

№1

Дано

$A=\cos\left(\frac{2019\pi}{2}+2\alpha\right)$; $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2019}}$

Решение

1) $A=\cos\left(1009\pi+\frac{1}{2}\pi+2\alpha\right)$

$A=\sin 2\alpha$

$A=\boxed{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

2) $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2019}}$

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{2019}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2019}$

$1+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2019}$

$A=2\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2019}-1=-\frac{2018}{2019}$

Ответ: $A=-\frac{2018}{2019}$

№3

$x_1, x_2; x_3, x_4$ - геом прогр

x_1 и x_2 - корни $f(x)=A=4x-x^2$

x_3 и x_4 - корни $f(x)=B=36x-x^2$

Найти: A; B

Решение:

$$\begin{cases} y_1=4x-x^2 \\ y_2=36x-x^2 \\ x_2=x_1\cdot 9 \\ x_4=x_3\cdot 9 \end{cases} \Rightarrow \cancel{x_2=x_1} \quad \frac{x_2}{x_4}=\frac{x_1}{x_3}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 5 0 2

№5 (Продолжение

По теор. Виетта

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = y_1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 + x_4 = 36 \\ x_3 \cdot x_4 = y_2 \end{cases} \\ \frac{x_2}{x_4} = \frac{x_1}{x_3} \quad (1) \end{cases}$$

~~И У~~ $\begin{cases} x_4 \neq 0 \\ x_3 \neq 0 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = y_1 \quad (2) \\ x_3 \cdot x_4 = y_2 \quad (3) \\ x_1 = 4 - x_2 \\ x_3 = 36 - x_4 \\ \frac{x_2}{x_4} = \frac{4 - x_2}{36 - x_4} \end{cases} \Rightarrow 36x_2 - x_2 \cdot x_4 = 4x_4 - x_2 x_4 \Rightarrow$$

$\frac{x_2}{x_4} = \frac{1}{9}$, тогда из (1) $\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{9}$

из (2) и (3): $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_3 \cdot x_4} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{9}$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\frac{1}{81} = \frac{4x - x^2}{36x - x^2}$$

$$36x - x^2 = 324x - 81x^2$$

$$80x^2 - 288x = 0$$

$$5x^2 - 18x = 0$$

$$x(5x - 18) = 0$$

$x = 0$ или $5x - 18 = 0$

$$x = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

$A = 4 \cdot 3{,}6 - (3{,}6)^2 = 14{,}4 - 12{,}96 = 1{,}44$

$B = 129{,}6 - 12{,}96 = 116{,}64$

Ответ $A = 1{,}44$; $B = 116{,}64$

4

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 40502

№ 4.

Дано:

$ABCD$-пар-м, $\omega(O, r)$

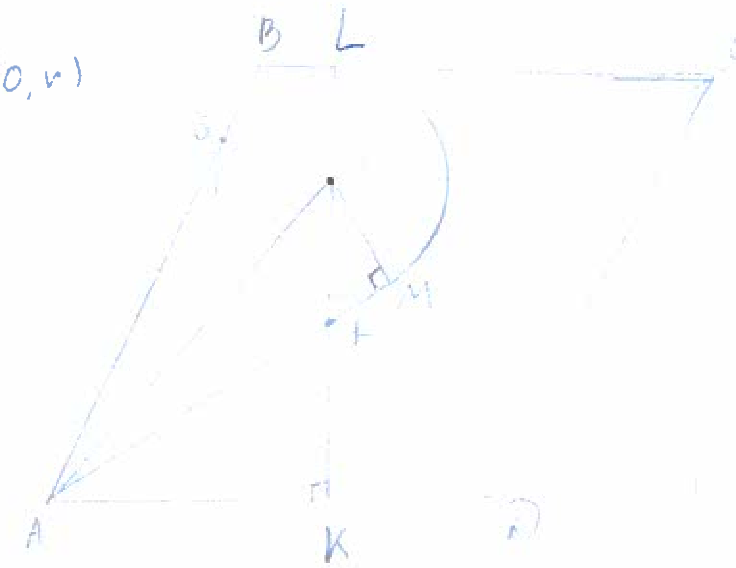
AC-диаг;

$\rho(O; A) = 5$

$\rho(O; AD) = 4$

$\rho(O; AC) = 3$

$S_{ABCD} = ?$



Решение:

1) $OL \perp BC$ (как касат) $\Rightarrow h_{ABCD} = LO + OK = 3 + 4 = 7$.
($OK \perp AD$, по усл.)

2) $OM \perp AC$ (по усл) и $\omega(O, r)$ впис в $\triangle ABC$ $\Rightarrow$
$OM = r = 3$, AC-касат и окр

3) Рассм $\triangle AOM$: $\angle AMO = 90°$, $AO = 5$; $OM = 3 \Rightarrow$
$\triangle AOM$ - егип. $\Rightarrow AM = 4$

Аналог рассм, $\triangle AOK$ и $\triangle ASO$ - египетск $\Rightarrow$
$AK = 3$ ($AO = 5$, $OK = 4$) и $AS = 4$ ($SO = 3$, т.к. $SO = r$ и
~~$SO \perp AB$, как касат~~
$SO \perp AB$, как касат; $AO = 5$)

4) $\triangle AOK = \triangle AOM = \triangle ASO$ (по трем стор.)
в равн. фиг все элем. соотв. равны $\Rightarrow$
$AS = OK$; $SO = AK$; $\angle OSA = \angle AKO = 90°$, значит
$ASOK$ - прямоуг, тогда $\angle A = 90° \Rightarrow \angle B = 90° = \angle C = \angle D$,
Тогда $ABCD$- прямоуг.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 0 | 5 | 0 | 2 |

№ 4 (продолжение)

Рассм рис 2

5) $\triangle AKF = \triangle FOM$ (по катету и прил к нему углу):

$\angle AKF = \angle FMO$

$AK = OM$

$\angle FAK = \angle MOF$, т. к. $\angle AFK = \angle OFM$, как вертик

6) Пусть $x = AF = OF \Rightarrow FM = 4 - x$

7) Рассм $\triangle AFM$, где $\angle OMF = 90°$, тогда по теор Пифагора:

$$3^2 + (4-x)^2 = x^2$$

$$9 + 16 - 8x + x^2 = x^2$$

$$x = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

8) $FK = 4 - 3\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

9) Пусть $KD = y$, тогда

т. к. $\triangle AFK \sim \triangle ACD$ (по двум угл: $\angle A$ - общ; $\angle AKF = \angle ADC$)

$\frac{FK}{CD} = \frac{AK}{AD}$, $\frac{\frac{7}{8}}{7} = \frac{3}{3+y}$; $\frac{1}{8} = \frac{3}{3+y}$; $y = 21$, тогда

$AD = AK + KD = 3 + 21 = 24$

10) $S_{ABCD} = CD \times AD = 7 \cdot 24 = 168$

Ответ: $S_{ABCD} = 168$

№6

$$f(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1$$

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

Если $x = 0$, то будет $1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$

$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{x^2}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 5 0 2

№6 (Продолжение)

$x^2+\frac{1}{x^2}+(a+1)(x-\frac{1}{x})+2a+1=0$

Пусть $x-\frac{1}{x}=t$, тогда $t^2=(x-\frac{1}{x})^2=$

$=x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-2 \Rightarrow$

$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$, тогда получаем

$t^2+2+(a+1)t+2a+1=0$

$t^2+(a+1)t+2a+3=0$ (2)

$D=(a+1)^2-4(2a+3)=a^2-6a-11$

$\frac{D}{4}=3^2+11=20$, $a=3\pm2\sqrt{5}$

$+ \quad 3-2\sqrt{5} \quad - \quad 3+2\sqrt{5} \quad +$ $\quad x$

Если $a\in(-\infty;3-2\sqrt{5})\cup(3+2\sqrt{5},+\infty)$, то ур-е (2) имеет 2 корня

Если $a=3\pm2\sqrt{5}$, то 1 корень

Если $a\in(3-2\sqrt{5},3+2\sqrt{5})$, то корней нет

~~Ответ $a\in(-\infty;3$~~

т.к. $x\in(-\infty,-1)$, подст. в исх. вар-е

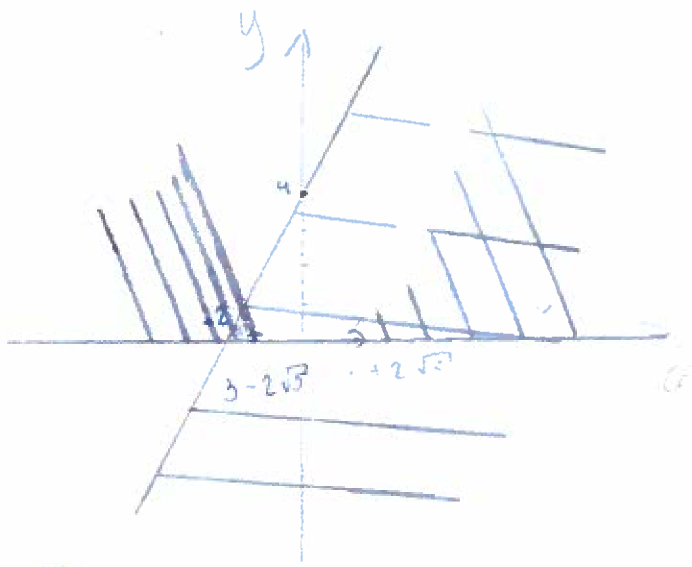
$x=-1$

$1-(a+1)+(2a+1)+(a+1)+1=2a+4$

$y \leq 2a+4$

№6 (продолжение)

Постр. графики $y < 2a + 4$



Ответ: $a \in (-2,\ 3-2\sqrt{5}) \cup (3+2\sqrt{5},\ +\infty)$