ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 8 5 5

Класс 10 **Вариант** 41 **Дата Олимпиады** 9.02.19

Площадка написания МОУ "СОШ №1 с углублённым изучением отдельных предметов", г. Надым

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	0					70	семьдесят	

см. след. стр

№1. $\begin{cases} A=\cos\left(\frac{2019\pi}{2}+2\alpha\right); (1) \\ \sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2019}} \end{cases}$

Решение:

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2019}}\right)^2$; $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{2019}$;

$\left.\begin{matrix}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow 1+\sin 2\alpha=\frac{1}{2019}; \Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{2018}{2019}; (2)$

По формулам приведения и учитывая, что значение (1) принадлежит IV четверти, имеем:

$A=\cos\left(\frac{2019\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos(1009{,}5\pi+2\alpha)=\sin 2\alpha$

Из (2): $A=-\frac{2018}{2019}$.

Ответ: $A=-\frac{2018}{2019}$;

№2.

$\begin{cases} \frac{x}{y+1}=\frac{y}{x+1}; (1) \\ x^2+2y+1=0; (2) \end{cases}$

Решение. Н.у: $\begin{cases} y\neq-1 & (y+1\neq0) \\ x\neq-1 & (x+1\neq0) \end{cases}$

из (1): $x^2+x=y^2+y$; (3)

Вычтем ур-е (2) из ур-я (3):

$x^2+x-x^2-2y-1=y^2+y-0; \Rightarrow x=y^2+3y+1; (4)$

$(4)\to(2)$: $(y^2+3y+1)^2+2y+1=0$; $(y^2+3y+1)(y^2+3y+1)+2y+1=0$;

$y^4+\cancel{3y^3}+\cancel{y^2}+3y^3+9y^2+\cancel{3y}+\cancel{y^2}+\cancel{3y}+1+\cancel{2y}+1=0$;

$y^4+6y^3+11y^2+8y+2=0$

$2\vdots\ \pm1,\ \pm2$;

$y=-1$: $1-6+11-8+2=0$; $(0=0)$

	1	6	11	8	2
−1	1	5	6	2	0

$y^4+6y^3+11y^2+8y+2=(y^3+5y^2+6y+2)(y+1)=0$;

$y^3+5y^2+6y+2=0$; $2\vdots\ \pm1,\ \pm2$;

	1	5	6	2
−1	1	4	2	0

$y=-1$: $-1+5-6+2=0$; $(0=0)$

$y^4+6y^3+11y^2+8y+2=(y+1)^2(y^2+4y+2)=0$;

$y^2+4y+2=0$; $D=4^2-4\cdot2=8$;

$y_1=\frac{-4+\sqrt{8}}{2}=\frac{2(-2+\sqrt{2})}{2}=-2+\sqrt{2}$;

$y_2=\frac{-4-\sqrt{8}}{2}=\frac{2(-2-\sqrt{2})}{2}=-2-\sqrt{2}$;

№2 (продолжение)

1) Если $y=-1$, то решений нет, т.к. $y=-1$ — не удовлетворяет н.у.

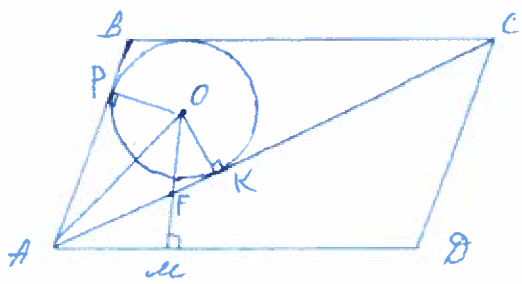
2) Если $y_1 = \sqrt{2}-2$, то: $x_1 = (\sqrt{2}-2)^2 + 3(\sqrt{2}-2)+1 = 2-4\sqrt{2}+4+3\sqrt{2}-6+1 = 1-\sqrt{2}$;

3) Если $y_2 = -2-\sqrt{2}$, то: $x_2 = (-2-\sqrt{2})^2 + 3(-2-\sqrt{2})+1 = 4+4\sqrt{2}+2-6-3\sqrt{2}+1 = 1+\sqrt{2}$;

Ответ: $x_1 = 1-\sqrt{2}$; $y_1 = \sqrt{2}-2$; $x_2 = 1+\sqrt{2}$; $y_2 = -\sqrt{2}-2$.

№4. Дано:
$ABCD$ — парал-м;
$\omega(O;R)$ — вписана в $\triangle ABC$;
$OA=5$;
$\rho(O;AD)=4$;
$\rho(O;AC)=3$

Найти: S_{ABCD} - ?



Решение:

1) Пусть $\rho(O;AD)=OM$ и $\rho(O;AC)=OK$; $OK=R$ (т.к. окружность вписана в $\triangle ABC$: $R \perp AC$ — в точке касания ω с AC)

2) Высота парал-ма — h (пусть); $h=R+OM$
т.к. $BC \parallel AD$ ($ABCD$ — парал-м) $OM \perp AD$
т.к. ω — вписана, то, проведя R до точки касания ω и BC, мы получим отрезок $\perp BC$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. через данную точку (в этой задаче — центр окружности) можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной прямой, то R, проведенный к точке касания ω с BC, и OM — лежат на одной прямой, являющейся высотой парал-ма $ABCD$); $h=3+4=7$;

3) (Пифагорова тройка):
$\triangle ACK$: $(OK=3;\ OA=5) \Rightarrow AK=4$
$\triangle AOM$: $(AO=5;\ OM=4) \Rightarrow AM=3$
$\Rightarrow$ $\triangle AOM = \triangle AOK$, по трём сторонам $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OAK = \angle AOM \Rightarrow$ (пусть $OM \cap AC = F$) в $\triangle AOF$: $OF = AF$

4) $\triangle AFM = \triangle OFK$ (по стороне и двум, прилежащим к ней, углам:
- $\angle AMF = \angle FKO = 90°$
- 1) по теореме о сумме углов в прямоугольном $\triangle$: $\angle FOK + \angle OFK = 90°$ и $\angle FAM + \angle AFM = 90°$;
  2) $\angle AFM = \angle OFK$, как вертикальные
  $\Rightarrow \angle FOK = \angle FAM$
- $OK = AM = 3$

$\Rightarrow FM = FK$

5) Пусть $FK = x$, тогда $AF = 4-x$; по теореме Пифагора:
($\triangle AFM$): $AF^2 = AM^2 + FM^2$; $(4-x)^2 = 9 + FM^2$; ($FM = FK = x$);
$(4-x)^2 = 9+x^2$; $16-8x+x^2 = 9+x^2$; $8x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{8}$. $\Rightarrow FK = \frac{7}{8}$; $FM = \frac{7}{8}$.

6) Пусть P — точка касания ω и BA ($\Rightarrow OP \perp BA$)

7) $PA=AK=4$ (как отрезки касательных, проведённые из одной точки)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 8 5 5

№4 (продолжение)

8) $\triangle POA$: $PO=3$; $AO=5$; $PA=4$ }
$\triangle AOM$: $AM=3$; $AO=5$; $OM=4$ } $\Rightarrow$ $\triangle POA = \triangle AOM$, по трём сторонам $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AOM = \angle PAO$

по теореме о сумме углов в прямоугольном $\triangle$: ($\triangle OAM$) $\angle OAM + \angle AOM = 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAO + \angle OAM = 90°$ ($\angle BAD = 90°$)

9) $ABCD$ – прямоугольник, по определению. (т.к. $ABCD$ – парал-м, по условию, с углами равными $90°$) $\Rightarrow \angle ADC = 90°$

10) $\triangle AFM \sim \triangle ACD$, по двум углам ($\angle A$ – общий; $\angle AMF = \angle ADC = 90°$)

$\frac{AM}{AD} = \frac{FM}{CD}$ ($CD = h$, как расстояния между параллельными прямыми)

$\frac{3}{AD} = \frac{7}{8 \cdot 7} = \frac{1}{8} \Rightarrow AD = 3 \cdot 8 = 24$.

11) $S_{ABCD} = h \cdot AD$; $S_{ABCD} = 7 \cdot 24 = 168$.

Ответ: $S_{ABCD} = 168$.

№5. Дано:

$f(x) = A = 4x - x^2$; $g(x) = B = 36x - x^2$;

$x_1; x_2$ – корни ур-я $f(x)$; $x_3; x_4$ – корни ур-я $g(x)$;

$x_1; x_2; x_3; x_4$ – геом. прогрессия; $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $x_3 > 0$; $x_4 > 0$

Найти: A-? B-?

Решение:

1) т.к. $x_1; x_2; x_3; x_4$ – геом. прогр., то $x_2 = x_1 q$; $x_3 = x_1 q^2$; $x_4 = x_1 \cdot q^3$

2) $A = (4-x) \cdot x$; $A = x_1(4 - x_1) = x_2(4 - x_2)$; $\Rightarrow x_1(4 - x_1) = x_1 q(4 - x_1 q) \mid \cdot \frac{1}{x_1}$; $4 - x_1 = 4q - x_1 q^2$;

$x^2(q^2 - 1) = 4q - 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4(q-1)}{(q-1)(q+1)}$; $x_1 = \frac{4}{q+1}$;

3) $B = x(36 - x)$;
$B = x_3(36 - x_3) = x_1 q^2(36 - x_1 q^2)$; }
$B = x_4(36 - x_4) = x_1 q^3(36 - x_1 q^3)$; } $\Rightarrow$ $x_1 q^2(36 - x_1 q^2) = x_1 q^3(36 - x_1 q^3) \mid \cdot \frac{1}{x_1 \cdot q^2}$
$36 - x_1 q^2 = 36q - x_1 q^4$

$x_1(q^4 - q^2) = 36(q-1)$; $x_1 = \frac{36(q-1)}{q^2(q^2-1)}$; $x_1 = \frac{36(q-1)}{q^2(q-1)(q+1)}$; $x_1 = \frac{36}{q^2(q+1)}$;

4) $x_1 = x_1$: $\frac{4}{q+1} = \frac{36}{q^2(q+1)}$, $4q^2(q+1) = 36(q+1) \mid \cdot \frac{1}{4(q+1)}$;
$q^2 = 9 \Rightarrow q_1 = 3$; $q_2 = -3$

при $q_1 = 3$: $x_1 = \frac{4}{3+1} = 1$;

при $q_2 = -3$: $x_1 = \frac{4}{-3+1} = -2$ (не удовлетворяет дано, т.к. $x_1 > 0$ должно быть; $\Rightarrow$ $q_2 = -3$ – не подходит, по условию задачи)

5) $A = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$; $x_3 = 1 \cdot 3^2 = 9$;
$B = 36 \cdot 9 - 9^2 = 243$

Ответ: $A = 3$; $B = 243$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 8 5 5

№3. Пусть x (ч.) — время, за которое первый рабочий выполняет всю работу в одиночку; y (ч) — время, за которое второй рабочий выполняет всю работу в одиночку.

По условию задачи, работая вместе, работники выполняют работу менее, чем за 4 часа (ур-е (1)), а работая в одиночку, первый справится на 6 часов быстрее второго, работающего в одиночку (ур-е (2))

Приняв всю работу за 1, составим и решим ур-е (1) и (2):

$\frac{1}{x}$ — работоспособность первого рабочего; $\frac{1}{y}$ — работоспособность второго рабочего.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < 4; & (1) \\ y-x=6; & (2) \end{cases}$$

т.к. время не может быть отрицательным или равным нулю, то ясно что: $x>0$, $y>0$

из условия задачи ясно: $y>x>0$; (5)

из (2): $y=6+x$; (3)

из (1): $\dfrac{1}{\frac{y+x}{yx}} < 4$; $\dfrac{xy}{x+y} < 4$; (4);

(3)⇒(4): $\dfrac{x(6+x)}{x+6+x} < 4$;

$\dfrac{6x+x^2}{6+2x} < 4$;

$\dfrac{6x+x^2-24-8x}{6+2x} < 0$, $\dfrac{x^2-2x-24}{6+2x} < 0$; $(x^2-2x-24)(6+2x) < 0$;

$x^2-2x-24=0$, $D=4+4\cdot 24=100$; $x_1=\frac{2+10}{2}$; $x_1=6$; $x_2=\frac{2-10}{2}$; $x_2=-4$

$(6+2x)(x^2-2x-24)=(x-6)(x+4)(6+2x)=2(x-6)(x+4)(3+x)$;

$x_1=6$; $x_2=-4$; $x_3=-3$. Учитывая, что $x>0$, найдём возможные значения x:

$\Rightarrow x \in (0;6)$

Ответ: первый рабочий, работая в одиночку, может справиться с работой за время от 0 до 6 часов (0 и 6 — не включительно).

№6. $f(x)=x^4+(a+1)x^3+(2a+1)x^2-(a+1)x+1$;

Решение: a: при $x\in(-\infty;-1)$; $f(x)$ — имеет не менее двух корней.

$f(x)=x^4+(a+1)(x^2-1)x+(2a+1)x^2+1$;

$f(x)=(a+1)(x-1)(x+1)x+x^2(x^2+2a+1)+1$;

$f(x)=(x^2+2a+1)\cdot x^2+(a+1)(x-1)(x+1)x+1$

$D=(a+1)^2(x-1)^2(x+1)^2-4(x^2+2a+1)=(a+1)^2(x^2-1)^2-4(x^2+2a+1)=$

$=(a^2+2a+1)(x^4-2x^2+1)-4(x^2+2a+1)=a^2x^4+2x^2a^2+a^2+$

$+2ax^4-4x^2a+2a+x^4-2x^2+1-4x^2-8a-4=$

$=a^2x^4+2x^2a^2+a^2+2ax^4-4x^2a-6a+x^4-6x^2-3$

$=x^4(a^2+2a+1)+x^2(2a^2-4a-6)+(a^2-6a-3)=$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 8 5 5

№6.(продолжение)

$= x^4(a+1)^2 + 2x^2((a-1)^2 - 2^2) + (a^2-6a-3) = x^4(a+1)^2 + 2x^2(a-1-2)\cdot$

$\cdot(a-1+2) + (a^2-6a-3) = x^4(a+1)^2 + 2x^2(a-3)(a+1) + ((a^2-6a+9)-12) =$

$= x^4(a+1)^2 + 2x^2(a-3)(a+1) + ((a-3)^2-12);$

(D_0 – используется обычная формула: $D = b^2 - 4ac$, но D_0 – дискриминант выражения: $x^4(a+1)^2 + 2x^2(a-3)(a+1) + ((a-3)^2-12) = 0$;)

~~$D_0 =$~~ Пусть $x^2 = t$: $(a+1)^2 \cdot t^2 + 2(a-3)(a+1)\cdot t + ((a-3)^2-12) = 0$;

$D_0 = 4((a-3)(a+1))^2 - 4(a+1)^2((a-3)^2-12) = 4(a+1)^2\cdot((a-3)^2-(a-3)^2+12) =$

$= 4(a+1)^2\cdot 12 = (4(a+1))^2\cdot 3;$

$f(x)$ ~~имеет~~ более двух решений (или два) при $D>0$;

$D>0$, если $D_0>0$. $(4(a+1))^2\cdot 3>0$ – всегда (при любых a)