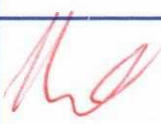


**ШИФР** 14032

Класс 11 Вариант 8 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | $\Sigma$ |          | Подпись                                                                             |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----------|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|        |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    | Цифрой   | Прописью |                                                                                     |
| Оценка | 5 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 15 | 15 | 20 | 100      | сто      |  |

л1

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 5$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 4 = 5$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 9 = 0$$

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2 > 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

Ответ:  $x = -1$  ✓  
 $x = 3$

л2

$$\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = 4$$

$$\text{ОДЗ: } x \geq 1; x \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\sqrt{3x-3} = 4 + \sqrt{x-3}$$

Обе части равенства неотрицательны  $\Rightarrow$  мы имеем право возвести их в квадрат

$$3x-3 = 16 + 8\sqrt{x-3} + x-3$$

$$2x-16 = 8\sqrt{x-3}$$

$$x-8 = 4\sqrt{x-3} \quad \text{При } x \geq 8 \text{ обе части снова неотрицательны} \\ \Rightarrow \text{можно возвести в квадрат}$$

При  $x < 8$  равенство выполняться не может

$$x^2 - 16x + 64 = 16x - 48$$

$$x^2 - 32x + 112 = 0$$

$$(x-28)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ и } x_2 = 28$$

Но  $x_1 = 4$  не подходит, т.к.  $x \geq 8$   
 $x_2 = 28$  условию удовлетворяет

Ответ:  $x = 28$  ✓

23

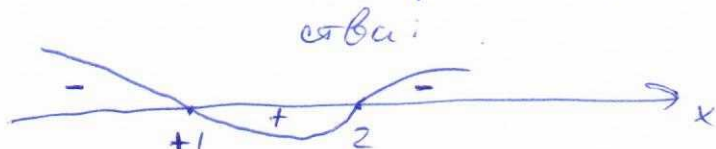
$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x + 1}{2-x} < x^2$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x + 1}{2-x} - x^2 = \frac{-x^3 + 2x^2 + x + 1 - 2x^2 + x^3}{2-x} = \frac{x+1}{2-x} < 0.$$

Иср-во  $\frac{x+1}{2-x} < 0$  равносильно системе

$$\begin{cases} (x+1)(2-x) < 0. \text{ Рассмотрим функцию } f(x) = (x+1)(2-x) \\ 2-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

рассмотрим её предельные значения



Получим образцы, или подходы

х также, что  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Ответ:  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$  ✓ ✗

24

$$\lg(3x-1) - \frac{1}{2} \lg(x+1) = \frac{1}{2} \lg(x+13) \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -1 \\ x > -13 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Т.к.  $x > \frac{1}{3}$ , то все выражения, стоящие в скобках, положительны  $\Rightarrow$  мы можем воспользоваться свойствами логарифмов:

под знаком логарифма положительные  $\Rightarrow$  мы можем воспользоваться свойствами логарифмов:

$$\lg(3x-1) - \lg(\sqrt{x+1}) = \lg(\sqrt{x+13})$$

$$\lg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}\right) = \lg(\sqrt{x+13}) \Rightarrow \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+13}.$$

Обе части р-ва положительны  $\Rightarrow$  возведем их в квадрат:

$$\frac{9x^2 - 6x + 1}{x+1} = x+13$$

$$9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 14x + 13$$

$$8x^2 - 20x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

$$D = 25 + 2 \cdot 37 = 49 = 7^2$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} = -\frac{1}{2}; 3, \text{ но } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ не удовн. ОДЗ, Ответ: } x = 3 \checkmark$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

14032

N5

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

Функция  $f(x) = a^x$  при  $a < 1$  и  $a > 0$  монотонно убывает =  
тобы выполнялось  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$ , необходимо

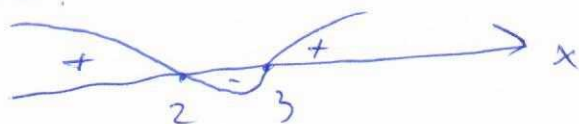
тобы  $2x+2 < 2x^2-8x+14$

$$2x^2 - 10x + 12 > 0$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$(x-2)(x-3) > 0.$$

Рассмотрим функцию  $y(x) = (x-2)(x-3)$  и ее графикам ясно по-  
толкства:



$\Rightarrow$  как подходить  $x \rightarrow$  там же, то

$$x < 2 \text{ и } x > 3.$$

Ответ:  $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$  ✓

N6.

Пусть на заводе изготовили  $x$  штук электродвигателей типа А и  
 $y$  штук электродвигателей типа В.

тогда меди израсходовали  $2x+3y$  кг  
свинца израсходовали  $4x+5y$  кг

Зная, что израсходовали 146 кг меди и 258 кг свинца, состави-  
м систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=146 \\ 4x+5y=258 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+6y=292 \\ 4x+5y=258 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+6y=292 \\ 4x+5y=258 \end{cases}$$

$$y=34$$

$$\Rightarrow x=22$$

Ответ: изготовили 22 двигателя типа А и  
34 двигателя типа В. ✓

Вспомогательная формула суммы  $n$  членов арифметической прогрессии:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

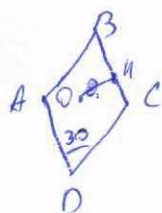
Пусть членов  $k$ , знае, что первый равен 4, а последний 5, а сумма 36, найдем  $k$ .

$$\frac{4+5}{2} \cdot k = 36$$

$$\Rightarrow k = \frac{36 \cdot 2}{5} = 8.$$

Ответ: 8 членов

✓



~~Пусть сторона~~  $n=8$ . Пусть сторона ромба равна  $a$ .

$O$  - центр окружности, вписанной в ромб.

Тогда высота из  $O$  на сторону  $BC$  равна радиусу этой окружности.

$$S_{\text{ромба}} = AD \cdot DC \cdot \sin \angle ADC = a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

В то же время ромб состоит из 4 равных треугольников  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$ ,  $DOA$ , площадь каждого из которых равна  $\frac{a \cdot OH}{2} = \frac{a \cdot r}{2}$ .

$$\Rightarrow \text{полная площадь ромба } 2ar \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2ar \Rightarrow r = \frac{a}{4}.$$

Теперь рассмотрим квадрат, вписанный в круг, радиуса  $R$ . Его диагональ равна  $2R$ , т.к. на нее опираются углы  $90^\circ$  она является диаметром. Знае, что площадь квадрата равна  $\frac{d^2}{2}$ , где  $d$  - диагональ, найдем площадь вписанного квадрата. Она равна  $\frac{(2R)^2}{2} = 2R^2$ .

$$\Rightarrow \text{Квадрат, вписанный в круг радиуса } \frac{a}{4}, \text{ имеет площадь } 2 \cdot \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{8}.$$

$$\text{Отношение площадей: } \frac{S_{\text{ромба}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{8}} = \frac{8}{2} = 4$$

Ответ: 4 ✓



29

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x+y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{Из 2 уравнение следует, что } x = \frac{2\pi}{3} - y.$$

Подставим это в I уравнение:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right) + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{3} \cos y - \cos\frac{2\pi}{3} \sin y + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y - \left(-\frac{1}{2}\right) \sin y + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos y + \frac{1}{2} \sin y + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$(\sqrt{3}+2) \cos y + \sin y = 1+\sqrt{3}. \quad \text{Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой}$$

Пусть  $\tan \frac{y}{2} = a$ .

$$\cos y = \frac{1 - \tan^2 \frac{y}{2}}{1 + \tan^2 \frac{y}{2}}; \quad \sin y = \frac{2 \tan \frac{y}{2}}{1 + \tan^2 \frac{y}{2}}$$

$$(\sqrt{3}+2) \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{2a}{1+a^2} = 1+\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}+2) - (\sqrt{3}+2)a^2 + 2a = 1+\sqrt{3} + (1+\sqrt{3})a^2$$

$$(3+2\sqrt{3})a^2 - 2a - 1 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = (1+\sqrt{3})^2$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm (1+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}; \quad \frac{-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad a_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{3} = \sqrt{3}-2$$

$$\Rightarrow \tan \frac{y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \frac{y}{2} = \sqrt{3}-2$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{y}{2} = \arctan(\sqrt{3}-2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$y = 2\arctan(\sqrt{3}-2) + 2\pi n.$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - 2\arctan(\sqrt{3}-2) - 2\pi n.$$

Ответ:  $\left(\frac{\pi}{3} - 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) k \in \mathbb{Z}$

$\neq \left(\frac{2\pi}{3} - 2\arctan(\sqrt{3}-2) + 2\pi n; 2\arctan(\sqrt{3}-2) + 2\pi n\right) n \in \mathbb{Z}.$

Заметим, что  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ . Пусть  $\sqrt[3]{40+\sqrt{1523}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1523}} = A$ . Тогда  $A^3 = 40 + \sqrt{1523} + 40 - \sqrt{1523} + 3 \cdot \sqrt[3]{(40+\sqrt{1523})(40-\sqrt{1523})} \cdot \sqrt[3]{40+\sqrt{1523}} + \sqrt[3]{40+\sqrt{1523}} \cdot \sqrt[3]{40-\sqrt{1523}}$   
 т.е.  $A^3 = 80 + 3 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot A \Rightarrow A^3 - 9A = 80 \Rightarrow (A-5)(A^2+5A+16)=0$ , но  $A^2+5A+16 > 0$ .  
 $\Rightarrow A=5$ . Ответ:  $\sqrt[3]{40+\sqrt{1523}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1523}} = 5$  ✓