

ШИФР

4350

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	

N1

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$$

$$(x-3)((x-1)(x-5) - x(x+3)) = 0$$

$$(x-3)(x^2-6x+5 - x^2-3x) = 0$$

$$(x-3)(-9x+5) = 0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{5}{9}; 3$.

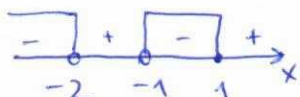
N3

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$.

N2

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$x-1 + 2\sqrt{(x-1)(3x+1)} + 3x+1 = 4$$

$$4x + 2\sqrt{3x^2-2x-1} = 4$$

$$\sqrt{3x^2-2x-1} = 2-2x$$

$$\begin{cases} 3x^2-2x-1 = 4x^2-8x+4 \\ 2-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Ответ: 1.

ШИФР

4350

N4

$$\log_3 x + \log_3 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0 \quad \checkmark$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12} \quad \checkmark$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

N6

~~сидирка~~ - a
 анора - b
 персига - c
 сиами - d

Всего - 77

$$\begin{cases} d = 2b \\ c = 1,5d \\ c = a + 13 \\ a + b + c + d = 77 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{d}{2} \\ c = 1,5d \\ 1,5d = a + 13 \\ a + b + c + d = 77 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{d}{2} \\ c = 1,5d \\ a = 1,5d - 13 \\ 1,5d - 13 + \frac{d}{2} + 1,5d + d = 77 \quad (1) \end{cases} \quad \checkmark \quad \Leftrightarrow$$

$$(1) 4d + \frac{d}{2} = 90$$

$$d = 20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 20 \\ b = 10 \\ c = 30 \\ a = 17 \end{cases}$$

Ответ: сидирка - ~~17~~¹⁷; анора - 10; персига - 30; ~~сидирка~~ сиами - 20.

N5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

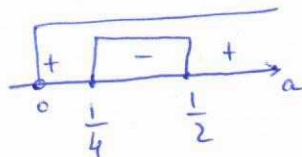
$$2^x = a, a > 0 \quad \checkmark$$

$$8a^2 - 6a + 1 \leq 0$$

$$D_4 = 9 - 8 = 1$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{8} \quad \checkmark$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ или } a = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$



$$\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^{-1} \quad 2 > 1 \uparrow$$

$$-2 \leq x \leq -1 \quad \checkmark$$

Ответ: $x \in [-2; -1]$.

N7

Если $\lg 2, \lg(2^x-1), \lg(2^x+1)$ - арифм. прогрессия $\Rightarrow$ выполняется

равенство: $\frac{\lg 2 + \lg(2^x+1)}{2} = \lg(2^x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2^x-1 > 0 \\ 2^x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \quad 2 > 1 \quad x > 0$

$\lg(2 \cdot 2^x + 2) = 2 \lg(2^x-1)$

$\lg(2 \cdot 2^x + 2) = 2 \lg(2^x-1)^2$

$2 \cdot 2^x + 2 = (2^x-1)^2$

$2^x = a, a > 0$

$2 \cdot a + 2 = a^2 - 2a + 1$

$a^2 - 4a - 1 = 0$

$D_0 = 4 + 1 = 5$

$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{1}$

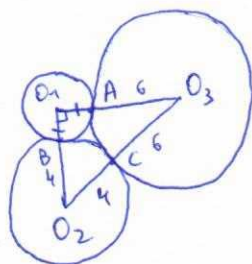
$\begin{cases} a = 2 + \sqrt{5} \\ a = 2 - \sqrt{5} < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5}$

$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$

Ответ: $\log_2(2 + \sqrt{5})$.

N8



$O_1A = ?$

Решение:

① $O_3A = O_3C = 6$ (по усл.)

$O_2C = O_2B = 4$ (по усл.)

② $\triangle O_1O_2O_3$ $O_1A = O_1B$ (как радиусы)

③ $\triangle O_1O_2O_3$:

$\triangle O_1O_2O_3$ - прямоугол. (по усл.)

$O_2C + O_3C > O_3A + O_1A$ (т.к. O_1A - радиус меньшей окр.)

$O_2C + O_3C > O_2B + O_1B$ (т.к. O_1A - радиус меньшей окр.)

Пусть $O_1A = O_1B = x$

$\angle O_2O_1O_3 = 90^\circ$

Используем теор. Пифаг.

$O_2O_3^2 = O_1O_2^2 + O_1O_3^2$

$10^2 = (x+4)^2 + (x+6)^2$

$10^2 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 12x + 36$

$2x^2 + 20x + 42 = 0$

$2x^2 + 20x - 48 = 0$

ШИФР 4350

(продолжение №8)

~~$x^2 + 10x + 24 = 0$~~

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$x = -12$ или $x = 2$

нет, т.к. $x < 0$

Ответ: 2. ✓

№10

$$A^3 + 3A - ?$$

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$\begin{aligned}
 A^3 + 3A &= \sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5}+2 + 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}) = \\
 &= 4 - 3\sqrt[3]{(5-4)(\sqrt{5}+2)} + 3\sqrt[3]{(5-4)(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 4
 \end{aligned}$$

Ответ: 4. ✓

№9

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)} = 3-2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4}-x)}{\cos x \cos(\frac{\pi}{4}-x)} = 3-2\sqrt{3} \quad \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{2}/2}{\cos x \cos(\frac{\pi}{4}-x)} = 3-2\sqrt{3} \quad | \cdot \cos x \cdot \cos(\frac{\pi}{4}-x)$$

$$\sqrt{2} \cos x \cos(\frac{\pi}{4}-x) = \frac{\sqrt{2}}{2(3-2\sqrt{3})} \quad \checkmark$$

$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{4}-x) - \sin(x-\frac{\pi}{4}+x)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2(3-2\sqrt{3})}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

4350

(продолжение №9)

~~$$\sin \frac{\pi}{4} - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{3}}$$~~

$$\frac{\cos(x + \frac{\pi}{4} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{4} + x)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2(3-2\sqrt{3})}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{3}}$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{2(3-2\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6-4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6-4\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6-4\sqrt{3}} < -1 \quad \checkmark$$

~~$$\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6-4\sqrt{3}}$$~~

$$1 < \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 6}$$

$$4\sqrt{3} - 6 < 2\sqrt{6} - \sqrt{2} \quad | \cdot 2$$

$$48 - 48\sqrt{3} + 36 < 24 - 4\sqrt{12} + 2$$

$$58 - 48\sqrt{3} < -4\sqrt{12}$$

$$29 - 24\sqrt{3} < -2\sqrt{12}$$

$$29 + 2\sqrt{12} < 24\sqrt{3} \quad | \cdot 2$$

$$84 + 58\sqrt{12} + 48 < 1728$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6-4\sqrt{3}} < -1 \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow y \in \emptyset$$

Ответ: $x \in \emptyset, y \in \emptyset$. $\checkmark$