ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 35614

Класс 11 Вариант 41 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания МАОУ „СШ „Земля родная"

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	–	5	15	15	20	0	55	пятьдесят пять	

Задание 2

• $f(x)=A$; $x^2-4x+A=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1\cdot x_2=A \\ x_1+x_2=4 \\ D>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1\cdot x_2=A \\ x_1+x_2=4 \\ A<4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Условиям системы удовлетворяют значение $A=3$; при этом $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \end{cases}$;

• Т.к. $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ – ~~арифм~~ геом. прогрессия и $x_2=3x_1$, имеем: $x_3=9$, $x_4=27 \Rightarrow B=9\cdot 27=243$;

• При этом $x_3=9$ и $x_4=27$ являются корнями $g(x)=B$, т.к. удовлетворяют системе условий, полученной из Т. Виета: $\begin{cases} x_3\cdot x_4=B \\ x_3+x_4=36 \end{cases}$

Ответ: $A=3$; $B=243$

Задание 3

$y=2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$; $y'=2\cdot 2\cdot(\sin\frac{x}{2})'\cdot(\cos\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin x$;

$y''=(\sin x)'=\cos x$; $y'''=(\cos x)'=-\sin x$; $y''''=(-\sin x)'=-\cos x$;

$y'''''=(-\cos x)'=-1\cdot(-\sin x)=\sin x$;

• Ряд производных $y=f(x)$ образует соответствующие группы по четыре функции в каждой: $\{\sin x; \cos x; -\sin x; -\cos x\}$

• Т.к. $2019 \vdots 3$, имеем $y^{(2019)}=y^{(3)}=-\sin x$;

Ответ: $y^{(2019)}=-\sin x$

Задание 4

• Пусть заданное уравнение будет обозначаться как (*); Тогда решения (*) должны удовлетворять системе: $\begin{cases} \cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}\geq 0 & (1) \\ \cos x-\frac{1}{2}\geq 0 & (2) \\ \cos\frac{x}{2018}+\cos x-1\geq 0 & (3) \end{cases}$

• Заметим, что условие (3) в составе системы получено почленным сложением условий (1) и (2). Значит, если (1) и (2) верны, то (3) тоже верно. Поэтому его можно исключить из системы условий.

• Заметим, что арифметический корень из любого неотрицательного числа принимает только неотрицательные значения. Значит, возведение левой и правой частей (*) в квадрат является в данном случае равносильным преобразованием. При этом (*) принимает вид: $\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}+2\cdot\sqrt{(\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2})(\cos x-\frac{1}{2})}+\cos x-\frac{1}{2}=\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1$;

Лист 1

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 35614

• После приведения подобных получаем: $2\cdot\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}=0 & (A)\\ \cos x-\frac{1}{2}=0 & (B)\end{array}\right.$

• Для (A): $\cos\frac{x}{2018}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2018}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$;

$x=\pm\frac{2018\pi}{3}+4036\pi n,\ n\in Z$;

• Для (B): $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; Проведем отбор корней:

• Семейство решений из (A) удовлетворяет условию ①, т.к. является решением для (A), и не удовлетворяет условию ②, т.к.:

$\cos\left(\pm\frac{2018\pi}{3}\right)=\cos\left(\pm\left(\frac{2\pi}{3}+672\pi\right)\right)=\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$;

• Семейство решений (B) удовлетворяет условию ②, т.к. является решением (B), и удовлетворяет условию (1), т.к. $\frac{x}{2018}=\frac{\pm\frac{\pi}{3}}{2018}\to 0$ и $\cos\left(\frac{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2018}\right)\to 1\geq\frac{1}{2}$;

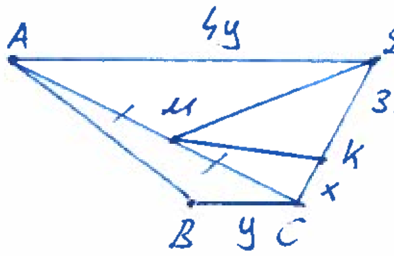
• Итак, решениями уравнения являются $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$

к?

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

∓

Задача 5



• Т.к. M - середина AC, MD - медиана в △ADC $\Rightarrow S_{ADM}=S_{CDM}=\frac{1}{2}S_{ADC}$;

• Пусть h_1 - длина высоты, проведённой в △MDK к стороне DK; но тогда h_1 является высотой и в △MCK, проведённой к $CK\in CD$

• Тогда: $S_{MCK}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot h_1$; $S_{MDK}=\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot h_1=3S_{MCK}\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MDK}=\frac{3}{4}S_{MDC}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}S_{ADC}=\frac{3}{8}S_{ADC}$;

• Пусть H - высота трапеции ABCD, но тогда H - высота в △ADC, проведённая к основанию AD; Тогда: $S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot 4y\cdot H=2yH$;

$S_{ADCB}=\frac{4y+y}{2}\cdot H=2{,}5yH\Rightarrow S_{ADC}=0{,}8\,S_{ABCD}\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MDK}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}S_{ABCD}=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{10}S_{ABCD}=0{,}3\,S_{ABCD}$;

Ответ: $\frac{S_{MKD}}{S_{ABCD}}=\frac{3}{10}$;

Задание 6

• Заметим, что $x^6=(x^3)^2$; Тогда примем $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$;

Тогда система примет вид: $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=1 & (C)\\ 3a+5b-4c=\sqrt{213} & (D)\end{cases}$

лист 2

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 35614

- Ясно, что никакие два из трех чисел a, b, c не могут быть равными нулю, ведь в этом случае оставшееся число будет $=1$, что не удовлетворяет (2).
- Заметим, что система имеет не более одного решения
- Преобразуем второе уравнение системы:

$$(3x^3+5y^3-4z^3)^2=(\sqrt{2/3})^2$$

$$30x^3y^3-24x^3z^3-40y^3z^3+16y^6+4z^6=204;$$

Ответ: $x=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $z=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;