ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 40165

Класс 10 Вариант 012 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	20	15	80	восемьдесят	

№1.

Пусть прошло x мин. или $\frac{1}{y}$ часа до встречи стрелок.

Тогда:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y}\cdot 60 & \text{(абс. прош. время)} \\ x = \frac{1}{y}\cdot 5 + 15 & \text{(расп. относит. цифры „0" (числа „12"))} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{60}{y} \\ \frac{60}{y} = \frac{5}{y} + 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{60}{y} \\ y = \frac{55}{15} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{60}{55}\cdot 15 = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11} \text{ мин}$$

Ответ: $16\frac{4}{11}$ мин.

№2.

$A=\sqrt{2017}+\sqrt{2019}$

$B=2\sqrt{2018}$ Предположим, что $A>B$.

$A>B \underset{A>1, B>1}{\Leftrightarrow} A^2\geq B^2 \Leftrightarrow 2017+2019+2\sqrt{2017\cdot2019}\geq 4\cdot 2018 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2017\cdot 2019}\geq 2018 \Leftrightarrow 2017\cdot 2019\geq 2018^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2018-1)(2018+1)\geq 2018^2 \Leftrightarrow 2018^2-1\geq 2018^2$ (?!)

Тогда $A<B$.

Ответ: $A<B$.

№3.

$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy=a^2-2a+1 \\ 2xy=2a^2-14a+28 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2=a^2-2a+1-2a^2+14a-28=$

$=-a^2+12a-27 \rightleftarrows f(a)$

$Г_f$ - парабола, ветви напр. вниз.

Тогда $\max f$ - в вершине параболы.

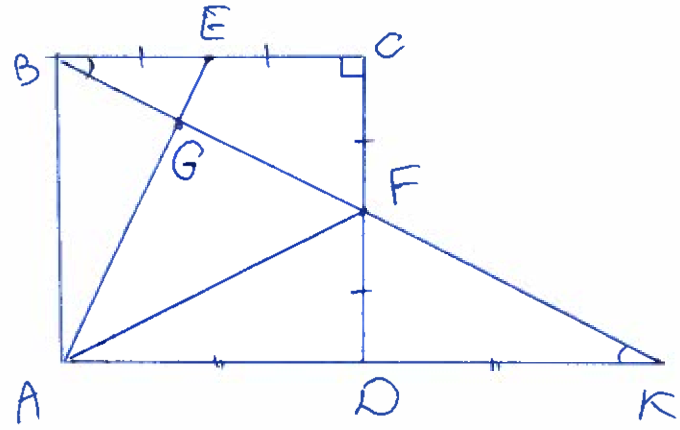
$X_{верш}=-\frac{-12}{2\cdot1}=6$

$Y_{верш}=-36+72-27=9$

Т.о. $\max(x^2+y^2)=9$.

Ответ: 9.

№4.



$[BF) \cap [AD) = \{K\}$.

$\triangle AGK \sim \triangle BGE$ $\rightarrow$
($\angle B = \angle K$ - накр. леж., $\angle BGE = \angle AGK$ - верт.)

$\rightarrow \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{AK}{BE} = 4$,

где h_2 - высота $\triangle BEG$ к BE
h_1 - высота $\triangle AGK$ к AK

$h_2 + h_1 = AB$, $h_1 = 4h_2$ $\rightarrow h_2 = \frac{1}{5}AB = \frac{2}{5}a$, где $a = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$...

$S_{BEG} = \frac{1}{2}h_2 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a \cdot a = \frac{1}{5}a^2$

$S_{GECF} = S_{BCF} - S_{BEG} = \frac{1}{2}a \cdot 2a - \frac{1}{5}a^2 = \frac{4}{5}a^2$

$S_{AGF} = S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{AFD} - S_{GECF} = 4a^2 - a^2 - a^2 - \frac{4}{5}a^2 = \frac{6}{5}a^2$

$\dfrac{S_{AGF}}{S_{GECF}} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$.

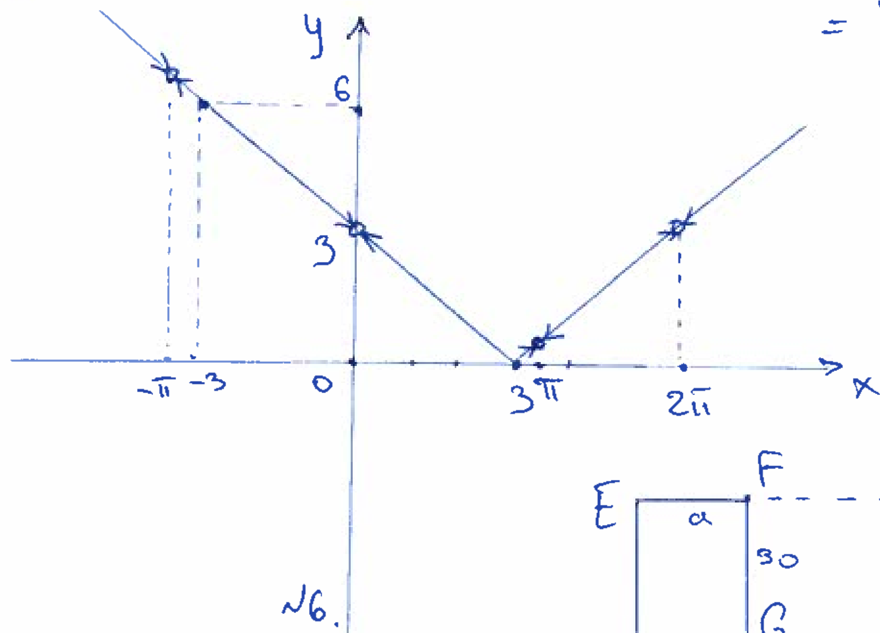
Ответ: площадь $\triangle AGF$ в 1,5 раза больше площади $GECF$.

№5.

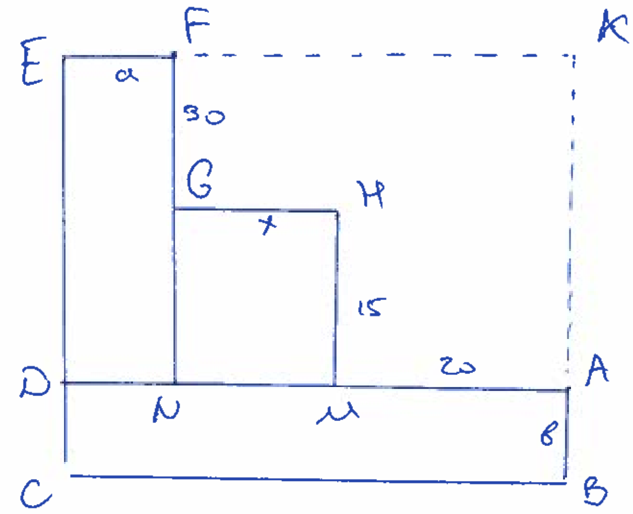
$$y=\sqrt{1-\cos^2x}\cdot\sqrt{1+ctg^2x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}=$$

$x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$$=\sqrt{\sin^2x}\cdot\sqrt{\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x}}\cdot\sqrt{(x-3)^2}=|\sin x|\cdot\frac{1}{|\sin x|}\cdot|x-3|=$$
$$=|x-3|$$



№6.



$P=2(a+x+20+15+30+b)$,

где $a=EF$, $b=AB$

$P\to\min \Leftrightarrow a+x+b=\min$, $x\geqslant 20$.

Увеличим x на δx.

$\delta S'=\delta x\cdot 15$

$\delta S''=\delta a\cdot(30+15)+\delta b\cdot(20+x+a)$ $\Big|\ \xrightarrow{S=const}$ $\delta x\cdot 15\geqslant\delta a\cdot 45+\delta b\cdot(40+a)$ ($x\geqslant 20$)

$\Leftrightarrow 15\,\delta x>\delta a\cdot 45+\delta b\cdot 40>\delta a\cdot 15+\delta b\cdot 15\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\delta x>\delta a+\delta b\Leftrightarrow x+\delta x+a-\delta a+b-\delta b>a+x+b$.

Т.о. $a+x+b=\min$ при $x=20$.

$S_{MHGN}=15\cdot 20=600$. Т.е. $S_{EFND}+S_{ABCD}=2100-600=$
$=1500$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 40165

№6 (продолжение)

$a\cdot 45+b\cdot(40+a)=1500,\quad a+b-\min\ \cancel{\Leftrightarrow a=b}$

$\cancel{x\cdot 45+x(40+x)=1500\Leftrightarrow x^2+85x-1500=0\Leftrightarrow}$

$\cancel{\Leftrightarrow (x-15)(x+100)=0 \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} x=15=a=b.}$

Тогда $EK=40+$

$a+b=\min \Leftrightarrow BCEK$ – квадрат

т.е. $a+40=b+45\Leftrightarrow a=b+5$

$(5+b)\cdot 45+b\cdot(40+b+5)=1500\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2+90b-1275=0$

$0<b=\dfrac{-90+\sqrt{13200}}{2}=-45+10\sqrt{33}.$

$BK=KE=45+b=10\sqrt{33}.$

$GH=20.$

Ответ: $BK=EK=10\sqrt{33}.$

$GH=20.$