



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7516

Класс 9^А Вариант 4 Дата Олимпиады 11.02.14

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	15	0	15	15	85	восемьдесят пять	

Ответ: основания равны 28 см
(к задаче №9) ✓

Задача №10

Пусть изначально x литров

	литры	часть соли
	x	$0,12$
-1 л	$x-1$	$0,12$
+1 л. воды	x	$0,12 \cdot \frac{x-1}{x}$
-1 л.	$x-1$	$0,12 \cdot \frac{x-1}{x}$
+1 л. воды	x	$0,12 \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-1}{x}$

$$0,12 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 0,03$$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{1}{2}$$

Очевидно, что $x > 1$, значит

$$\frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x-1 = 0,5x$$

$$0,5x = 1$$

$$x = 2$$

Ответ: вместимость бутылки = 2 литра ✓

Задача №9

Пусть $x = a-2$

$$\frac{x^2 + 16x^2}{(x+4)^2} = 33$$

$$16x^2 = (33-x^2)(x+4)^2$$

$$16(a-2)^2 = (33-(a-2)^2)(a+2)^2$$

$$16a^2 - 64a + 64 = 33a^2 + 132a + 132 - a^4 - 4a^3 - 4a^2 + 16a^2 + 16a$$

$$29a^2 - 196a$$

$$-4a^2 - 16a + 16$$

ШИФР 7516

Задача №6

Количество ушедших девочек находится в промежутке от 0 до 5.

Пусть изначально девочек и мальчиков по x (а в сумме их $2x$)

После ухода 5-ых у нас есть 6 вариантов

($2x-5 \neq 0$, иначе же $x=2,5$, значит мы можем делить на $(2x-5)$)

$$\frac{x}{2x-5} = 0,48$$

$$x = 0,96x - 2,4$$

$$0,04x = -2,4$$

$$x = \frac{-2,4}{0,04}$$

$$x < 0$$

$$\frac{x-1}{2x-5} = 0,48$$

$$x-1 = 0,96x-2,4$$

$$0,04x = -1,4$$

$$x = \frac{-1,4}{0,04}$$

$$x < 0$$

$$\frac{x-2}{2x-5} = 0,48$$

$$x-2 = 0,96x-2,4$$

$$0,04x = -0,4$$

$$x = \frac{-0,4}{0,04}$$

$$x < 0$$

$$\frac{x-3}{2x-5} = 0,48$$

$$x-3 = 0,96x-2,4$$

$$0,04x = 0,6$$

$$x = 15$$

$$2x = 30$$

$$\frac{x-4}{2x-5} = 0,48$$

$$x-4 = 0,96x-2,4$$

$$0,04x = 1,6$$

$$x = 40$$

$$2x = 80$$

$$2x > 40, \text{ а } 80 \text{ — целое, значит } 2x = 80$$

$$\frac{x-5}{2x-5} = 0,48$$

$$x-5 = 0,96x-2,4$$

$$0,04x = 2,6$$

$$x = 65$$

$$2x = 130$$

$$2x > 70$$

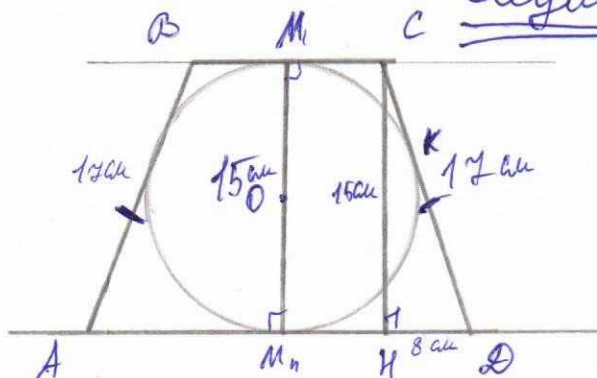
Ответ: всего учеников 30 человек ✓

Задача №7

$$-8t + 224 + x + 2y - 19z = -3(t - 4u + 3x + y + 3z) + 5(-t + 2u + 2x + y - 2z) = (-3) \cdot (-2) + (5 \cdot 3) = 6 + 15 = 21$$

Ответ: 21

Задача №9



П.к. $ABCD$ — описан вокруг окружности, BC и AD — касательные, т.е. OM и ON — радиусы. Значит $OM, ON \perp BC, AD$. Проведем еще одну перпендикуляр OK к CD .

П.к. $BC \parallel AD$, то $OM, ON = 15 \text{ см} = OK$. $\triangle OKD$ — прямоугольный, значит $OK^2 + KD^2 = OD^2$. $15^2 + KD^2 = 17^2$. $KD^2 = 17^2 - 15^2 = 64$. $KD = 8$.

Сделаем кратковременное П.к. CM, CK, DK, DM — отрезки касательных, то $CM = CK, DK = DM$.

$$DM + MC = CK + KD = CD = 17 \text{ см}$$

Значит $MC = DM = a$ (пусть так)

$$17 = DM + MC = a + a + 8$$

$$2a = 9 \quad a = 4,5$$

Из симметрии очевидно, что $AM = MD$. В BM, MC , значит MC и MD — середины оснований.

$$BC = 2 \cdot MC = 2 \cdot a = 9$$

$$AD = 2 \cdot MD = 2(a + 8) = 25$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 4516

Ответ: 1
(к третьей задаче)

Задача №4

Пусть в точках пересечения значений функции равны, значит

$$2x + a = x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 1 - a = 0$$

Это уравнение, содержащее в себе корни которого и будут являться точки пересечения, т.к. оно получено приравниванием функций. Найдём значение a , при котором будет лишь одно решение. Т.к. это параболка одно решение при $D = 0$

$$D = 0^2 - 4(-1-a) = 0$$

$$4a + 4 = 0$$

$$4a = -4$$

$$a = -1$$

Ответ: при $a = -1$ ✓

Задача №5

Пусть $a = a_1 \cdot k$, $b = b_1 \cdot k$, где k - НОД чисел a и b , значит числа a_1 и b_1 взаимно просты, а также ни одно из них не равно 1, иначе оно будет кратно другому.

$$\text{НОД} = k = 18$$

$$\text{НОК} = a_1 \cdot b_1 \cdot k = 630$$

$$a_1 \cdot b_1 = \frac{630}{k} = \frac{630}{18} = 35 = 5 \cdot 7$$

Числа a_1 и b_1 - натуральные, значит у нас есть два варианта

$a_1 = 1$, $b_1 = 35$ (как было сказано ранее не подходит) и

$a_1 = 5$, $b_1 = 7$ (пу и, естественно ему симметричный)

$$a = 5 \cdot 18 = 90 \quad b = 7 \cdot 18 = 126$$

Ответ: 126 ; 90 ✓

Задание №1

Пусть начальная скорость $= X$, а путь $= S$, тогда $5 \cdot X \leq S$.

Т.к. автомобиль ехал 2 часа со скоростью X , а потом оставшийся путь со скоростью $(X+5)$ и приехал на 15 минут быстрее, чем планировал 5 часов, то суммарное время вышло равным 4,75 часа, соответственно в часть дистанции он проехал за 2,75 часа $(4,75 - 2)$.

$$\text{Тогда } 2 \cdot X + 2,75(X+5) = S = 5X$$

$$2X + 2,75X + 13,75 = 5X$$

$$13,75 = 0,25X$$

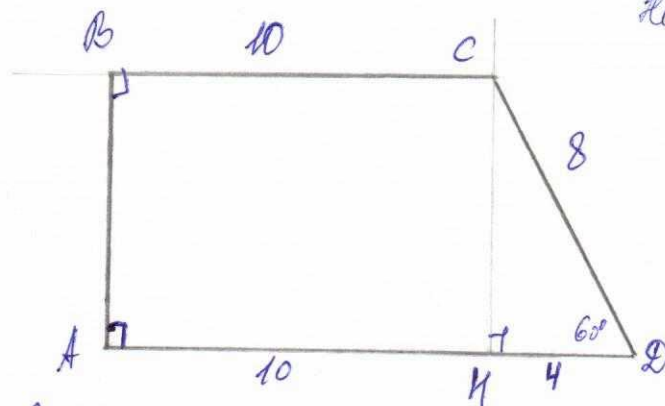
$$55 = X$$

Ответ: первонач. скорость $= 55 \text{ км/ч}$

Задание №2

Дано: $ABCD$ - прямоуг. трап., $\angle CDA = 60^\circ$, $BC = 10 \text{ см}$, $CD = 8$

Найти: сред. линию



Проведем высоту CH .

$\triangle CHD$ - прямоугольный

$$CH = CD \cdot \cos \angle CDH = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$BA \parallel CH$, т.к. обе прямые перпендикулярны стороне AD .

$BC \parallel AH$, т.к. $ABCD$ - трап.

Значит $ABCH$ - параллелограмм, т.к. его стороны попарно параллельны, а значит $AH = BC = 10$

$$AH = BC = 10$$

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований $= \frac{10 + 14}{2} = 12$

Ответ: средняя линия $= 12 \text{ см}$ ✓

Задание №3

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{1,5-\sqrt{3}+0,5}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{1,5+\sqrt{3}+0,5} = \sqrt{\frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \left|\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Пусть $\sqrt{\frac{2}{3}} = a$ $\sqrt{\frac{1}{2}} = b$ $\sqrt{\frac{3}{2}} = c$, тогда наше уравнение имеет вид

$$(a+b)(c-b) + (a-b)(c+b) = ac - ab + bc - b^2 + ac + ab - bc - b^2 = (ac - b^2) \cdot 2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right) \cdot 2 = (1 - 0,5) \cdot 2 = 1 \quad \checkmark$$