

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	

№1

$$(x-4)(x-3)(x-5) = x(x^2-9);$$

$$(x-4)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0;$$

$$(x-3)((x-4)(x-5) - x(x+3)) = 0$$

$$(x-3)(x^2-6x+5-x^2-3x) = 0$$

$$(x-3)(5-9x) = 0 \Rightarrow x = 3; x = \frac{5}{9}$$

Ответ: 3; $\frac{5}{9}$ ✓

№2

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2; 0 \leq x \leq 3; \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 3];$$

Пусть $\sqrt{x-1} = t; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x-1; 3t^2 = 3x-3; 3t^2+4 = 3x-1$

$$\Rightarrow 4 + \sqrt{3t^2+4} = 2; \sqrt{3t^2+4} = 2-t;$$

$$\begin{cases} 3t^2+4 = 4-4t+t^2 \\ 2-t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t^2+4t = 0 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t(t+2) = 0 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \text{ но так как } t \geq 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$$

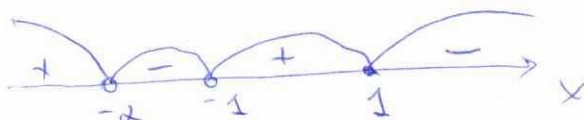
Ответ: 1 ✓



№3

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}; \quad \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0; \quad \frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0;$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0;$$



Нули: $x = -1$

$0 \nless 3: x \neq -1; x \neq -2$

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓

№4

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}; \quad 0 \nless 3: x > 0$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}; \quad \log_3 x = \frac{1}{2}; \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

№5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x; \quad 8 \cdot 2^{2x} + 1 - 6 \cdot 2^x \leq 0; \quad \text{Пусть } 2^x = t; \quad t > 0$$

$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0; \quad D = 36 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 36 - 32 = 4 = 2^2$$

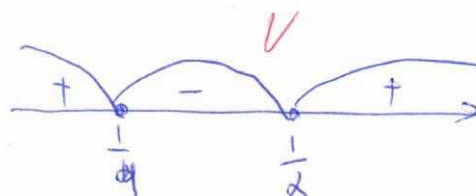
$$\begin{cases} t = \frac{6+2}{16} \\ t = \frac{6-2}{16} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ 2^x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

~~Ответ: -1; -2~~

$$8\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0;$$

Нули: $t = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{4}$



$\Rightarrow t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$



№5 (продолжение)

$$2^x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right] \rightarrow x \in [-2; -1]$$

Ответ: $x \in [-2; -1]$ ✓

№6

Пусть x (шт) было представлено ангорских кошек $\Rightarrow$
шамских $x = 2x \Rightarrow$ персидских $= 3x$; сибирских $= 3x - 13$

$$x + 2x + 3x + 3x - 13 = 77;$$

$$9x = 90$$

$$x = 10$$

Таким образом, на выставке было представлено 10 ангорских кошек,
20 шамских; 30 персидских; 17 сибирских ✓

Ответ: 10 ангорских; 20 шамских; 30 персидских; 17 сибирских

№7

$$\lg 2; \lg(2^x - 1); \lg(2^x + 1); \text{ОАЗ: } \begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 2^x + 1 > 0 \end{cases} \text{ , т.к. } 2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 1 > 0$$

т.к. это арифметическая прогрессия,
то $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$

$$2^x > 1 \Rightarrow x > 0$$

$$I \quad \lg 2 = \frac{\lg(2^x - 1) + \lg(2^x + 1)}{2}; \quad 2 \lg 2 = \lg((2^x - 1)(2^x + 1));$$

$$2 \lg 2 = \lg(2^{2x} - 1); \quad \lg 4 = \lg(2^{2x} - 1) \Rightarrow 4 = 2^{2x} - 1;$$

$$2^{2x} = 5; \quad 2^{2x} = 2^{\log_2 5} \Rightarrow 2x = \log_2 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_2 5 > 0$$

№ 2 (продолжение)

$$\# \quad \lg(2^x - 1) = \frac{\lg 2 + \lg(2^x + 1)}{2}$$

$$2 \lg(2^x - 1) = \lg(2 \cdot 2^x + 2)$$

$$\lg((2^x - 1)^2) = \lg(2 \cdot 2^x + 2)$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0, \text{ Пусть } 2^x = t, t > 0$$

$$t^2 - 4t - 1 = 0; D = 16 + 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\begin{cases} t = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} < 0, \text{ т.к. } 4 < 2\sqrt{5}; \text{ т.к. } \sqrt{16} < \sqrt{20}$$

$$\Rightarrow t = 2 + \sqrt{5}; 2^x = 2 + \sqrt{5}; 2^x = 2^{\log_2(2 + \sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{5}) > 0$$

$$\text{III} \quad \lg(2^x + 1) = \frac{\lg 2 + \lg(2^x - 1)}{2}; 2 \lg(2^x + 1) = \lg(2 \cdot 2^x - 2)$$

$$\lg((2^x + 1)^2) = \lg(2 \cdot 2^x - 2); 2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x - 2; 2^{2x} = -3, \text{ что}$$

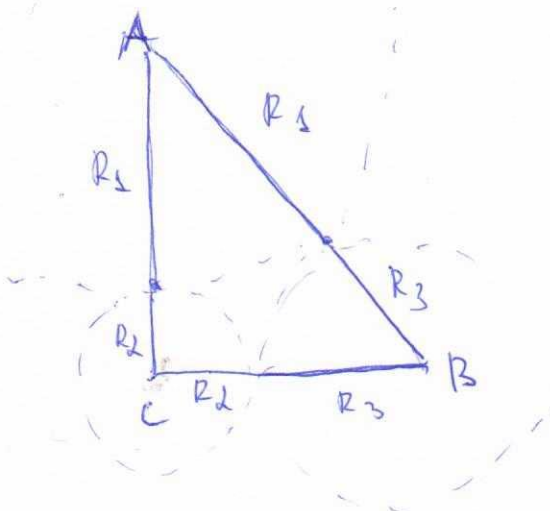
невозможно; корней нет

Ответ: данные числа образуют арифметическую прогрессию

при $x = \frac{1}{2} \log_2 5$ и $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$ ✓

~~или~~ **ли. улюбле!**

№8



Возможны 3 случая расположения окружностей; 1) Большая окружность проходит через вершину прямого угла 2) средняя окружность проходит через вершину ^{прямого} угла. 3) меньшая окружность проходит через вершину прямого угла

Пусть радиус меньшей окружности = x (см.)
 $x > 0$

1) $AC = 6 + 4 = 10$; $BC = 6 + x$; $AB = 4 + x \Rightarrow$ такого не может быть, т.к. гипотенуза самая большая сторона треугольника
 $AB > BC$ и $AB > AC$; но $BC > AB \Rightarrow$ невозможно

2) $AC = 4 + 6 = 10$; $BC = 4 + x$; $AB = 6 + x$; тогда по т. Пифагора.
 $AC^2 + BC^2 = AB^2$; $100 + (4+x)^2 = (6+x)^2$; $100 + 16 + 8x + x^2 = 36 + 12x + x^2$;
 $4x = 80$; $x = 20$; но это невозможно, т.к. $20 > 6 > 4$,
а мы ищем меньший радиус

3) $AC = 4 + x$; $BC = 6 + x$; $AB = 4 + 6 = 10$; по т. Пифагора
 $(4+x)^2 + (6+x)^2 = 100$; $16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2 = 100$;
 $2x^2 + 20x - 48 = 0$; $x^2 + 10x - 24 = 0$
 $D = 100 + 4 \cdot 24 = 196 = 14^2$
 $\begin{cases} x = \frac{-10 \pm 14}{2} \\ x = \frac{-10 - 14}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -12 \end{cases} \Rightarrow x = 2$
 $x > 0$

Таким образом, радиус меньшей окружности = 2 см

Ответ: 2 см; ✓

ШИФР 12214

$\sqrt{0.9}$

$$1) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{\sin \frac{\sqrt{1}}{4}}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x \cdot \cos y} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y)} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2\cos(x-y)} - \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 6\cos(x-y) + 4\sqrt{3}\cos(x-y)}{\sqrt{2} + 2\cos(x-y)} = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \cos(x-y)(\sqrt{3}-6) + 2\sqrt{6} - \sqrt{2} = 0 \\ \cos(x-y) \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \cos(x-y) = -\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \\ \cos(x-y) \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x+y = \frac{\sqrt{1}}{4} \\ \cos(x-y) = -\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \text{ но } -\frac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} < -1, \text{ а } \cos(x-y) \in [-1; 1] \\ x-y \neq \pm \frac{3\sqrt{1}}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: решений нет. ✓



№10

$A^3 + 3A$, если $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

$$(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 + 3 \cdot (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}) =$$

$$= \sqrt{5}+2 - 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \cdot (\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}) + \\ + 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \cdot (\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}) - \sqrt{5}+2 + 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})$$

$$= 4 - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})(\sqrt[3]{5-4}) + 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})$$

$$= 4 ; \text{ Ответ: } 4. \quad \checkmark$$