ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 35969

Класс 11 **Вариант** 012 **Дата Олимпиады** 09.02.19

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	—	—	50	пятьдесят	[illegible]

№ 1.

Докажем, что уравнение $x^4 = 6x^3 - 11x^2 + 4x - 9$ не имеет решений. Для этого построим графики функций $y = x^4$ и $y = 6x^3 - 11x^2 + 4x - 9$

$y = x^4$

x	0	1	2
y	0	1	16

$y = 6x^3 - 11x^2 + 4x - 9$

ООФ: x – л.д.ч.

МЗФ: y – л.д.ч.

$x = 0$: $y = -9$ $\quad (0; -9)$

$y' = 18x^2 - 22x + 4$

$18x^2 - 22x + 4 = 0$

$9x^2 - 11x + 2 = 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{11-7}{18} = \frac{2}{9}$ $\quad x_2 = \frac{11+7}{18} = 1$

$y(x)$: ↗ $\frac{2}{9}$ ↘ 1 ↗; $y'(x)$: $+$ $\frac{2}{9}$ $-$ 1 $+$

$y\left(\frac{2}{9}\right) = -8\frac{512}{729}$ $\quad \left(\frac{2}{9}; -8\frac{512}{729}\right)$ – т. максимума

$y(1) = -10$ $\quad (1; -10)$ – т. минимума

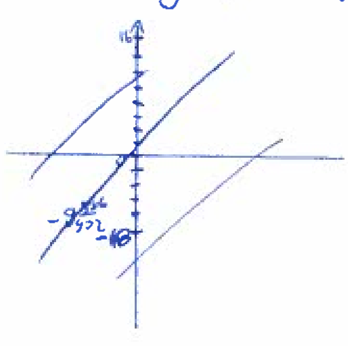
$y'' = 36x - 22$

$36x - 22 = 0$

$x = \frac{11}{18}$

$y(x)$: ∩ $\frac{11}{18}$ ∪; $y''(x)$: $-$ $\frac{11}{18}$ $+$

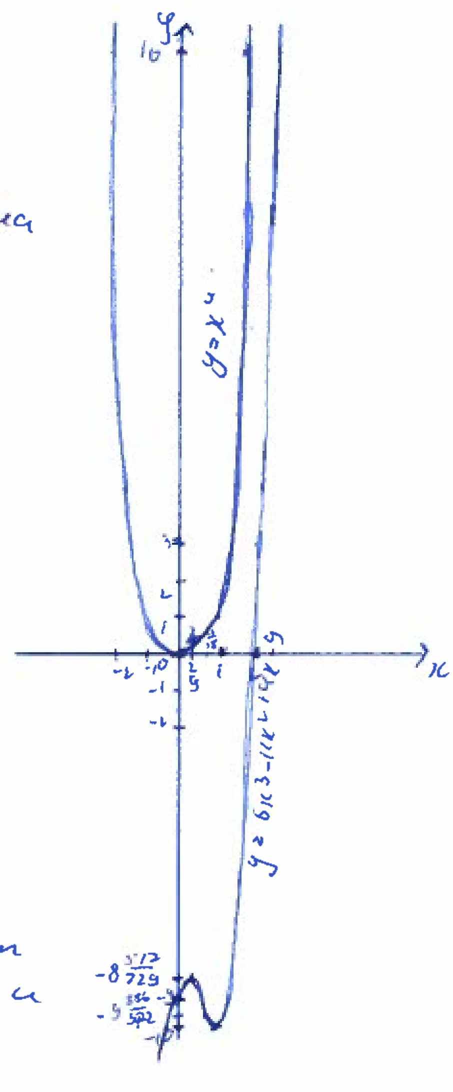
$y\left(\frac{11}{18}\right) = -9\frac{886}{972}$ $\quad \left(\frac{11}{18}; -9\frac{886}{972}\right)$ – т. перегиба



Доп. точки:

$x = 2$; $y = 3$ $\quad (2; 3)$

$x = 3$; $y = 66$ $\quad (3; 66)$



Как видно, графики не пересекаются значит уравнение $x^4 = 6x^3 - 11x^2 + 4x - 9$ не имеет решений, значит решений не имеет и уравнение $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = 0$ ч.т.д.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 9 6 9

~~№ 3.~~

~~$y=\cos^2x$ $\cos 2x = \cos^2x-\sin^2x = \cos^2x-(1-\cos^2x) = \cos^2x-\sin^2x\cos^2x+\cos^2x+\cos^2x$~~

~~$2\cos^2x = \cos 2x+1$; $\cos^2x = \frac{\cos 2x+1}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$~~

~~$F(x)=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$~~

~~$F(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)$ одна из п/о 1-го порядка для $F(x)$, т.к. $F'(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\cos 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=F(x)$~~

~~$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\cos 2x}{4}\right)$ одна из п/о 2-го порядка для $F(x)$~~

~~$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{\sin 2x}{8}\right)$ одна из п/о 3-го порядка для $F(x)$~~

~~$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{24}+\frac{\cos 2x}{16}\right)$ одна из п/о 4-го порядка для $F(x)$~~

~~Рассмотрев производные 1, 2, 3 и 4-го порядков, можно выяснить, как будут изменяться их части.~~

~~$F(x)=\underset{a}{\frac{1}{2}}\left(\underset{b}{\frac{x^4}{24}}+\underset{c}{\frac{\cos 2x}{16}}\right)$ одна из~~

№ 3.

$y=\cos^2x$ $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$y=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$y'=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)'=\frac{1}{2}(-2\sin 2x)=-\sin 2x$

$y''=(-\sin 2x)'=-2\cos 2x$

$y'''=(-2\cos 2x)'=4\sin 2x$

$y''''=(4\sin 2x)'=8\cos 2x$

$y'''''=-16\sin 2x$

Рассмотрев производные 1, 2, 3, 4 и 5-го порядков, можно выяснить, как они будут изменяться

$y'''''=\underset{a}{-}\underset{b}{16}\underset{c}{\sin 2x}$ — производная 5-го порядка

a(Знак): Знаки чередуются: для производных 1 и 2, 5 и 6, 9 и 10 порядков и так далее знак отрицательный, для 3 и 4, 7 и 8 и т.д. — положительный. Значит, для производной 2019 порядка знак положительный (+)

в(Коэффициент): меняется по закону 2^{n-1}, где n — номер порядка. Значит для 2019 порядка: $2^{2019-1}=2^{2018}$

c($\sin 2x/\cos 2x$): Синусы и косинусы чередуются: для нечётных степеней синус, для чётных косинус. Значит, для 2019 (нечётного числа) — синус ($\sin 2x$)

Итого получается $2^{2018}\cdot\sin 2x$ — производная 2019 порядка для $y=\cos^2x$

Ответ: $2^{2018}\cdot\sin 2x$

№ 4.

Пусть x — кол-во бетонщиков (Б). Тогда монтажников (М) $3x$, каменщиков (К) $3x$, а двумя профессиями (~~БМ~~) владеют

$3x+3$ человек, а одной $36-(3x+3)=36-3-3x=33-3x$, что и нужно найти. Составим уравнение:

$3xn+3x+x-(3x+3)=36$

$3xn+x-3=36$

$3xn+x=39$

Зная, что людей в каждой профессии должно быть не более 36 человек, решим ~~найдём~~ возможные значения $x\in N$ из неравенства $3xn\leq 36$

$xn\leq 12$

Для $n=3$ (мин. число): $3x\leq 12$

$x\leq 4$

Проверим все возможные вар-ты на наличие $n\in N$:

$x=1$: $3n+1=39$ $\quad 3n=38$ $\quad n=\frac{38}{3}\notin N$

$x=2$: $6n+2=39$ $\quad 6n=37$ $\quad n=\frac{37}{6}\notin N$

$x=3$: $9n+3=39$ $\quad 9n=36$ $\quad n=4$; $4\in N$

$x=4$: $12n+4=39$ $\quad 12n=35$ $\quad n=\frac{35}{12}\in N$

$n\in N$ имеется только при $x=3$. Подставим $x=3$ в выражение $33-3x$; $33-3x=33-3\cdot 3=33-9=24$

Ответ: 24

№2.

$(\sqrt{7-4\sqrt3})^x+(\sqrt{7+4\sqrt3})^x\leq 14$

Замена: $\sqrt{7-4\sqrt3}=a$; $\sqrt{7+4\sqrt3}=b$

$ab=\sqrt{(7-4\sqrt3)(7+4\sqrt3)}=\sqrt{49-48}=1$, зн. $b=\frac{1}{a}$

$a^x+b^x\leq 14$

$\left(\frac{1}{b^x}\right)+b^x\leq 14$ $|\cdot b^x\neq 0$

$b^{2x}-14b^x+1\leq 0$

$b^{2x}-14b^x+1=0$

$\sqrt D=\sqrt{196-4}=\sqrt{192}=8\sqrt3$

$b^x_1=\frac{14-8\sqrt3}{2}=7-4\sqrt3$ $\quad b^x_2=\frac{14+8\sqrt3}{2}=7+4\sqrt3$

$7-4\sqrt3\leq(\sqrt{7+4\sqrt3})^x\leq 7+4\sqrt3$

$(7+4\sqrt3)^{-1}\leq(7+4\sqrt3)^{\frac{x}{2}}\leq(7+4\sqrt3)^1$

$-1\leq\frac{x}{2}\leq 1$ $|\cdot 2$

$-2\leq x\leq 2$

$x\in[-2;2]$

Ответ: $x\in[-2;2]$

$\frac{7+4\sqrt3}{7-4\sqrt3}=\frac{(7+4\sqrt3)^2}{(7+4\sqrt3)(7-4\sqrt3)}=\frac{(7+4\sqrt3)^2}{49-48}=(7+4\sqrt3)^2$

$7-4\sqrt3=\cancel{(7+4\sqrt3)}\ \frac{7+4\sqrt3}{(7+4\sqrt3)^2}=(7+4\sqrt3)^{-1}$