ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

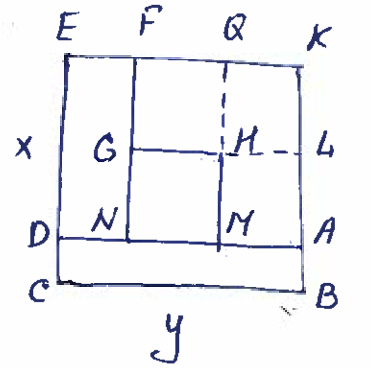
ШИФР | 4 | 5 | 5 | 2 | 7 |

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 9.02.2019

Площадка написания С-Петербургский Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	–	7	20	20	0	52	пятьдесят два	[signature]

№5



Пусть сторона квадрата $EC = x$, а сторона $CB = y$.
~~Сторона~~ Отрезок $GH = a$ $(a \geq 20$ м$)$.

Известно, что: $MA = 20$м, $GF = 30$м, $MH = 15$м и площадь многоугольника $ABCEFGHM$ $S = 2100$.

S_1 – площадь ~~четырехуголь~~ четырёхугольника $DEFN$

$S_2 - GHMN$

$S_3 - DABC$

$S = S_1 + S_2 + S_3$

$S = (FG + GN) \cdot EF + GH \cdot HM + CB \cdot DC$ $\quad (GN = HM = 15$м$)$ $NM = GH = a$

~~Подставим значения~~

~~$2100 = (30 + 15) \cdot$~~

~~$S1$~~ $S = (FG + HM) \cdot (CB - \overset{GH}{NM} - MA) + GH \cdot HM + CB \cdot (\overset{EC}{\cancel{EC}} - ED)$

Подставим: $2100 = (30 + 15) \cdot (y - a - 20) + a \cdot 15 + y(x - 45)$

$2100 = \cancel{45y} - 45a - 45 \cdot 20 + 15a + xy - \cancel{45y}$

$2100 = -30a + xy - 900$ $\quad S = -30a + xy - 900$

$xy - 30a = 3000$ (1)

~~$*$ ~~кво~~ прямоугольник $CEKB$: $EC = x$, $CB = y$~~

~~$S_{CEKB} = xy$ $\quad S_{CEKB} = S_1 + S_2 + S_3 + S_{KLGF} + S_{HLAM} = 2100 + GF \cdot \cancel{y}(GH + HL) + MA \cdot HM$~~

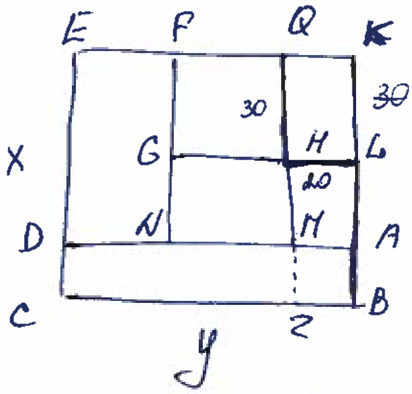
~~$xy = 2100 + 30 \cdot (a + 20) + 20 \cdot 15$ $\quad (*)$~~

~~Подставим выражение $(*)$ в (1)~~

~~$2100 + 30a + 600 + 20$~~

4 два многоугольника $EFGHMABC$ (P_1) и $EQHLBC$ (P_2)

Их периметры равны; ~~$P_1=P_2$~~ т.к.:



$P_1 = EF + FG + GH + HM + MA + AB + BC + EC$

$P_2 = EQ + QH + HL + LB + BC + EC$

$EQ = EF + FQ = EF + GH$

$FG = QH$

$HL = MA$

$LB = LA + AB = HM + AB$

Тогда $S_{EQHLBC} = S_{EQZC} + S_{HLBZ} =$

$= (y - MA)\cdot x + MA\cdot(x - FG) = (y-20)x + 20\cdot(x-30) = xy \cancel{-20x+20x} - 600 =$

$= xy - 600$

~~$S_{EQHLBC} - S = S_{FQHG} + S_{HLMA} = xy - 600 - xy + 30a$~~

~~$xy - 600 - (xy - 30a - 900) = FG$~~

~~$S_{EQHLBC} - S = FG\cdot GH + \cancel{HM}\ MA\cdot HM$~~

~~$yx - 600 - xy + 900 + 30a = 30a$~~

~~P_2 минимален, тогда, когда минимален периметр ~~прям~~ прямоугольника $QKHL$, т.е. когда $QKHL$ является квадратом~~

P_1 минимален, тогда, когда минимален периметр прямоугольника $EKBC$, т.е., когда $EKBC$ является квадратом. $(x=y)$

~~Мы пол~~ Получим, что: $\begin{cases} xy = 3000 + 30a \\ a \geq 20 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 = 3000 + 30\cdot a \\ a \geq 20 \end{cases}$

При $a=20$ площадь минимальна и равна ~~3000~~ ~~$3xy$~~ 3600
при ~~$DC = x - FG - HM = 60$~~

Тогда $x = y = 60$. Отсюда получим, что:

$BK = CE = x = 60$

$KE = CB = y = 60$

$GH = a = 20$

длина ограждения является наименьшей

Ответ: 60; 60; 20

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 5 | 5 | 2 | 7 |

№1

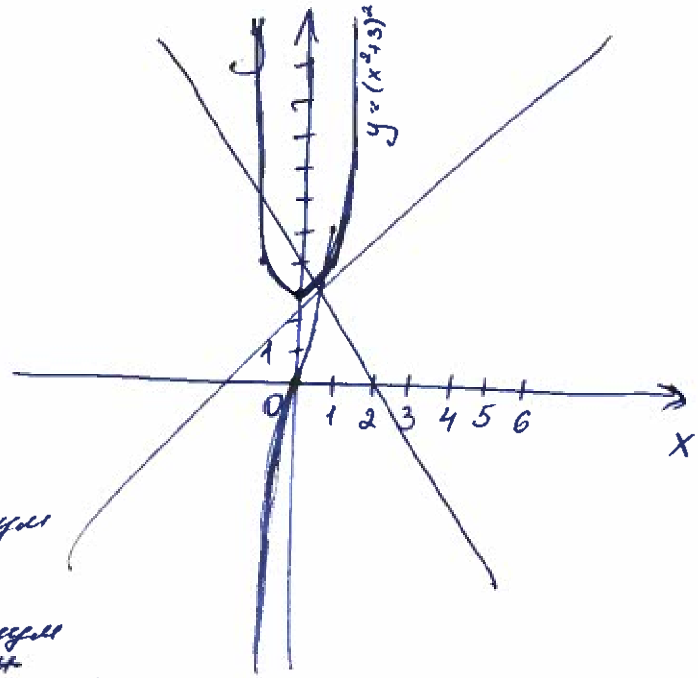
$x^4-6x^3+11x^2-4x+9=0$

$x^4+6x^2+9=6x^3-5x^2+4x$

$(x^2+3)^2=x(6x^2-5x+4)$

$y=(x^2+3)^2$

$y=x(6x^2-5x+4)$



Докажем, что графики данных функций не пересекаются

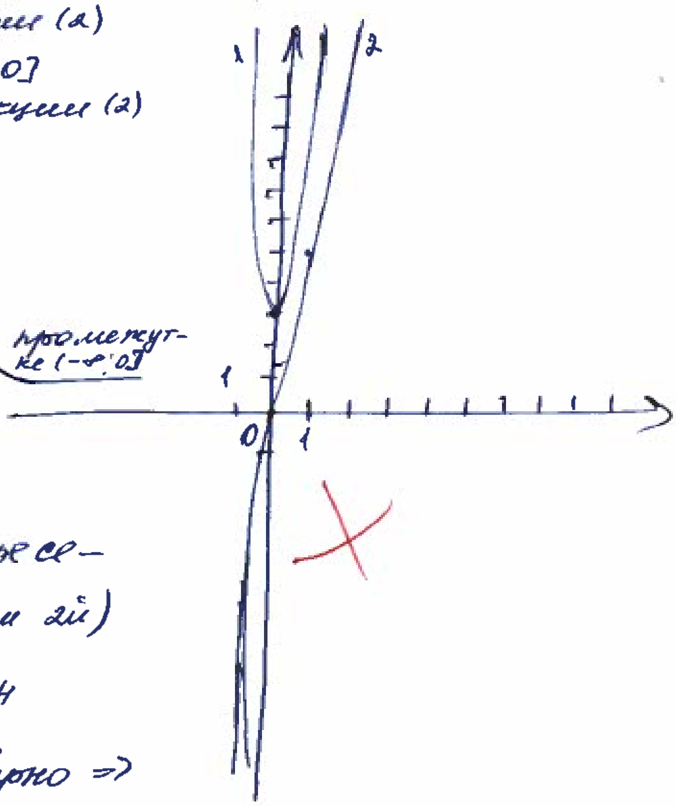
$y=(x^2+3)^2$ (1) $y=3$ – минимум

x	0	1	−1	2	−2
y	3	16	16	49	49

$y=x(6x^2-5x+4)$ (2) $y=0$ – ~~максимум~~ максимум функции (2) при $x\in(-\infty;0]$

x	0	1	−1
y	0	5	−15

$y=0$ – минимум функции (2) при $x\in[0;+\infty)$



На $(-\infty;0]$ ~~ф-я~~ функция (1) убывает, а ~~в~~ функция (2) возрастает, причём ~~[illegible]~~ максимума 2й ф-ии (на промежутке $(-\infty;0]$) меньше ~~[illegible]~~ минимума 1й $\Rightarrow$ функции не пересекаются

На $[0;+\infty)$ 1я ~~ф-я~~ функция возрастает быстрее 2й ~~ф-ии~~ функции и они не пересекаются (степень 1й функции больше степени 2й)

Т.к. ф-ии $y=(x^2+3)^2$ и $y=6x^3-5x^2+4$ не имеют общих точек, то равенство $(x^2+3)^2=x\cdot(6x^2-5x+4)$ неверно $\Rightarrow$ ~~неверно~~

~~$\Rightarrow$ уравнение $x^4-6x^3+11x^2-4x+9=0$ не имеет решений~~

На $(-\infty;0]$ ф-я (1) убывает, а функция (2) возрастает, причём минимум (1)й функции больше максимума (2)-й (на $(-\infty;0]$) $\Rightarrow$ функции (1) и (2) не пересекаются на $(-\infty;0]$

На $[0;+\infty)$ функция (1) возрастает быстрее, чем функция (2) $\Rightarrow$ они не имеют общих точек на $[0;+\infty)$.

Получим, что функции (1) и (2) не пересекаются, значит уравнение $(x^2+3)^2=x(6x^2-5x+4)$ не имеет корней $\Rightarrow$ уравнение $x^4-6x^3+11x^2-4x+9=0$ не имеет решений

~~№3~~

~~$y = \cos^2 x$~~

~~$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$ – производная 1-го порядка~~

~~$y'' = 2(-\sin x)\cdot(-\cos x)$ – производная 2-го порядка~~

~~$y''' = 2(-\cos x)\cdot \sin x$ – производная 3-го порядка~~

~~т.к производная ф-ии $y=\cos x$: $y' = -\sin x$, а производная ф-ии $y = \sin x$: $y' = \cos x$, то~~

№3

$y = \cos^2 x$

$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2(\cos x \cdot \sin x)$

$\cancel{y'' = -2(-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x) = -2(\sin^2 x + \cos^2 x) =}$

$\cancel{y''' = -2(\sin^2 x + \cos^2 x)'}$

$y' = 2\cos x(-\sin x) = -2(\cos x \cdot \sin x)$

$y'' = -2(-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x) = -2(\cos^2 x - \sin^2 x) \cancel{= -2\cos 2x}$

$y''' = -2(\cos^2 x - \sin^2 x)' = -2(2\cos x(-\sin x) - 2\sin x \cdot \cos x) =$

$= 2(4(\cos x \cdot \sin x)) = 8\sin x \cdot \cos x$

$y^{IV} = 8(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$y^{V} = -8(4 \cdot \cos x \cdot \sin x) = -32\sin x \cdot \cos x$

Можно увидеть закономерность:

I каждая нечётная производная имеет $\sin x \cdot \cos x$

II Числа перед $\sin x \cdot \cos x$ в нечётных производных образуют геометрическую прогрессию ($a_1 = -2$, $a_2 = 8$, $a_3 = -36$, $q = -4$)

Тогда $a_{2019} = a_1 \cdot q^{(n-1)} = -2 \cdot 4^{2018}$

Получим, что $y^{(2019)}$ - производная 2019-го порядка

$y^{(2019)} = -2 \cdot (-4)^{2018} \cdot \sin x \cdot \cos x = -\sin x \cdot \cos x \, 2 \cdot (2^2)^{2018} \cancel{= -\sin}$

$= -2^{4037} \cdot \sin x \cdot \cos x$

Ответ: $-2^{4037} \cdot \sin x \cdot \cos x$

F

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 5 2 7

№4 Пусть ~~кол~~ q – количество бойцов владеющих 1 профессией

Тогда $36-q$ – кол-во бойцов владеющих двумя профессиями.

~~Известно что~~

x – кол-во плотников

y – кол-во каменщиков

z – кол-во бетонщиков

Известно, что: $\begin{cases} x=3z \\ nx=y \end{cases}$ $(3\le n\le 20)$ $\begin{cases} x=3z \\ y=3nz \end{cases}$

$x+y+z=36+36-q$

$x+y+z=72-q$ (*)

$3z+3nz+z=72-q$ ~~(*)~~

Также известно, что: $36-q=3+x$

Составим систему уравнений

$\begin{cases} 3z+3nz+z=72-q \\ 3\le n\le 20 \\ 36-q=3+3z \end{cases}$ $\begin{cases} 3z+3nz+z=72-33+3z \\ 3\le n\le 20 \\ \cancel{z=\frac{33-q}{3}}\ q=33-3z \end{cases}$

$\begin{cases} (1+3n)z=39 \\ 3\le n\le 20 \\ q=33-3z \end{cases}$ т.к $z\in\mathbb{N}$, то $z=\frac{39}{1+3n}$ – целое положит-е число

При $n=4$ $z=3$

$n=4$ удовл-ет нер-ву $3\le n\le 20$

Т.о $z=3$, значит $x=9$ и $y=3\cdot4\cdot3=36$

Подставим полученные значения в (*):

$36+9+3=72-q$

$36-q=12$

$q=24$

Получим, что 24 бойца владеют 1 профессией

Ответ: 24

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 5 | 5 | 2 | 7

№6

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 & (1) \\ x^2+xz+z^2=16 & (2) \\ y^2+yz+z^2=64 & (3) \end{cases}$$

1) Вычтем из (3) уравнения (2):

$y^2+yz+z^2-x^2-xz-z^2=64-16$

$y^2-x^2+z(y-x)=48$

$(y-x)(x+y)+z(y-x)=48$

$(y-x)(z+x+y)=48$

2) Вычтем из (2) уравнения (1):

$x^2+xz+z^2-x^2-xy-y^2=7$

$x(z-y)+z^2-y^2=7$

$x(z-y)+(z-y)(z+y)=7$

$(z-y)(x+z+y)=7$

3) Вычтем из (3) уравнения (1):

$y^2+yz+z^2-x^2-xy-y^2=55$

$y(z-x)+z^2-x^2=55$

$(z-x)(x+y+z)=55$

$$\begin{cases} (z-y)(x+y+z)=7 & (*) \\ (y-x)(x+y+z)=48 & (**) \\ (z-x)(x+y+z)=55 \end{cases}$$

4) $(*):(**)$:

$\frac{z-y}{y-x}=\frac{7}{48}$

$48z-48y=7y-7x$

$48z+7x=55y$

При $x\neq y\neq z$, ~~x, y, z~~ $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$

$48z+7x=55y$