ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a \cdot b)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 4 1 6

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 02.08.19

Площадка написания УГТУ, г. УХТА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	~~15~~ 10	~~20~~ 20					~~80~~ 75	восемьдесят	

№2.

$A = \sqrt{2017} + \sqrt{2018}$

$B = 2\sqrt{2018}$

$A <=> B$ -?

Будем проделывать равносильные преобразования

Решение:

пусть $x = 2018$, тогда $x+1 = 2019$, $x-1 = 2017$.

Получим: $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$, $B = 2\sqrt{x}$

1) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ и $2\sqrt{x}$ – возведём оба выражения в квадрат

получим $x-1+x+1+2\sqrt{(x-1)(x+1)}$ и $4x$

$2x + 2\sqrt{x^2-1}$ и $4x$

2) разделим оба выражения на 2. Получим: $x + \sqrt{x^2-1}$ и $2x$.

3) видим, что из обоих выражений можем вычесть x, получаем:

$\sqrt{x^2-1}$ и x

4) правое выражение, т.е. x, подгоним под корень и получим $\sqrt{x^2}$.

5) Сравнивая выражения $\sqrt{x^2-1}$ и $\sqrt{x^2}$, придём к выводу, что больше то, где подкоренное выражение больше, т.е. остаётся сравнить x^2-1 и x^2

$x^2 - 1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2}$, а значит $\sqrt{x^2-1} < x$

$x + \sqrt{x^2-1} < 2x$

$2x + 2\sqrt{x^2-1} < 4x$

$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} < 2\sqrt{x}$

$\Downarrow$

$A < B$

+

10

Ответ: $A < B$.

№3.

Решение:

$$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2=(a-1)^2 \\ 2xy=2a^2-14a+28 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} x^2+2xy+y^2=a^2-2a+1 \\ 2xy=2a^2-14a+28 \end{cases}$$

$$x^2+y^2=-a^2+12a-29$$

найдя из системы x^2+y^2, получили:

$x^2+y^2=-a^2+12a-29$

x^2+y^2 принимает наибольшее значение тогда, когда $-a^2+12a-29$ принимает наибольшее значение.

составим функцию: $y=-a^2+12a-29$ — квадратичная функция, график - парабола ветви направлены вниз.

$y=-a^2+12a-29=-(a^2-12a+36)+7=-(a-6)^2+7$

нарисуем схематично график функции:

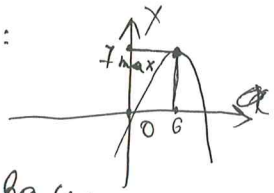


График функции $y=-(a-6)^2+7$ образован параллельным переносом графика функции $y=-a^2$ путём сдвига вдоль оси на 6 ед. отр. вправо и по оси OY на 7 ед. отр. вверх. Значит вершина этого графика имеет координаты (6;7), причём эта вершина график принимает max значение (как видно по графику). Проверим вершину параболы и найдём её по другому. Пусть $B(m;n)$ - вершина, тогда $m=\frac{-12}{2\cdot(-1)}=6$, $n=-36+72-29=7$ (верно) $\Rightarrow$ вершина параболы действительно находится в т. (6;7).

Получили: сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение при $a=6$.

Ответ: при $a=6$.

№4.

Дано:
ABCD - квадрат
E - середина BC
F - середина CD
$AE \cap BF = G$
Найти:
сравнить
S_{GECF} и $S_{\triangle AGE}$

Решение:

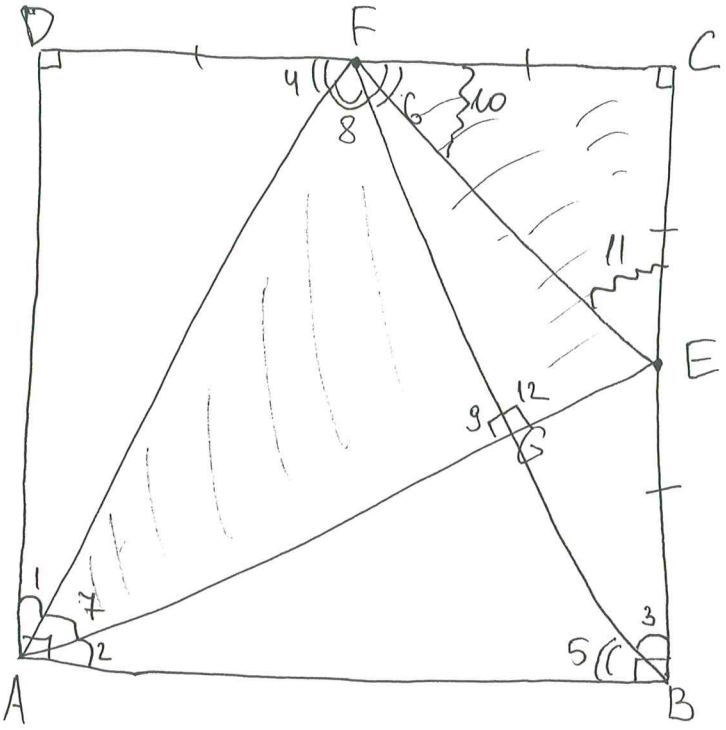
1) обозначим сторону квадрата ABCD через a. Т.к. в квадрате все стороны равны (по определению - квадрат прямоугольник, у которого все стороны равны), то $AB=BC=CD=AD=a$

2) т.к. E - середина BC, то $BE=CE=\frac{a}{2}$
т.к. F - середина CD, то $CF=DF=a$ $\Rightarrow BE=CE=CF=DF=\frac{a}{2}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 4 1 6



3) доп. построение: проведём AF

4) рассмотрим △ ADF, △ ABE и △ BCF

1. AD = AB = BC (п.1)
2. DF = BE = CF (п.2)

а т.к. все данные 3 △ прямоугольные (∠D = ∠C = ∠B = ∠A = 90° – по св-ву квадрата), то имеем, что данные все △ равны по 2 катетам

⇓

△ ADF = △ ABE = △ BCF

⇓

AF = AE = BF (т.к. соответствующие катеты в равных △ равны)
∠1 = ∠2 = ∠3
∠4 = ∠5 = ∠6

5) △ ADF – прямоугольный (п.4)

$DF = \frac{a}{2}$ (п.2), $AD = a$ (п.1) $\Rightarrow DF = \frac{1}{2} AD \Rightarrow$ по св-ву прямоугольного △ (катет, равный половине гипотенузы, лежит против угла в 30°) $\Rightarrow$

∠1 = 30° $\Rightarrow$ по п.4 ∠2 = ∠3 = 30°.

6) ∠A = 90° (п.4), ∠A = ∠1 + ∠2 + ∠7 $\Rightarrow$ ∠7 = ∠A − (∠1 + ∠2) = 90° − (30° + 30°) = 30°

7) ∠DFC – развёрнутый (т.к. его сторонами является одна прямая) $\Rightarrow$

∠DFC = 180° = ∠4 + ∠8 + ∠6

8) △ADF – прямоугольный (п.4)

по св-ву (сумма острых углов в прямоугольном △ равна 90°) имеем:

∠1 + ∠4 = 90° $\Rightarrow$ ∠4 = 90° − ∠1 = 90° − 30° = 60°

∠4 = ∠5 = ∠6 = 60° (по п.4)

9) ∠DFC = ∠4 + ∠8 + ∠6 = 180° (п.7) $\Rightarrow$ ∠8 = 180° − ∠4 − ∠6 = 180° − 60° − 60° = 60°

10) △ AGF:

∠7 + ∠8 + ∠9 = 180° (т.к. сумма углов в △ равна 180°) $\Rightarrow$ ∠9 = 180° − ∠7 − ∠8 = 180° − (30° + 60°) = 90° $\Rightarrow$ △ AGF – прямоугольный (по опр.)

11) ΔADF – прямоугольный (п. 4)

по теореме Пифагора имеем: $AF^2 = AD^2 + DF^2 \Rightarrow AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} =$

$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

12) ΔAGF – прямоугольный (п. 10)

FG – катет, лежащий напротив угла в $30^\circ \Rightarrow FG = \frac{1}{2}AF = \frac{a\sqrt{5}}{2\cdot 2} =$ (по св-ву)

$= \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{\frac{5a^2}{16}}$

по теореме Пифагора имеем:

$AF^2 = AG^2 + FG^2 \Rightarrow AG = \sqrt{AF^2 - FG^2} = \sqrt{\frac{5a^2 \cdot 4}{4} - \frac{5a^2}{16}} = \sqrt{\frac{20a^2 - 5a^2}{16}}$

$= \sqrt{\frac{15a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$

$S_{\Delta AGF} = \frac{1}{2} AG \cdot FG = \frac{a\sqrt{15} \cdot a\sqrt{5}}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{a^2\sqrt{5\cdot 5\cdot 3}}{32} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$

13) доп. построение: проведём прямую FE.

14) ΔFCE

$\angle C = 90^\circ$ (п. 4) $\Rightarrow \Delta FCE$ – прямоугольный (по определению)

$CF = CE$ (п. 2) $\Rightarrow \Delta FCE$ – равнобедренный (по определению) $\Rightarrow$ ~~$\angle 10 = \angle 11 =$~~ (с основанием FE)

~~$= \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (по св-ву равнобедренного прямоугольного Δ)~~

по теореме Пифагора имеем: $FE^2 = CF^2 + CE^2 \Rightarrow FE = \sqrt{CF^2 + CE^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1\cdot a^2}{4_2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $S_{\Delta FCE} = \frac{1}{2} CF \cdot CE = \frac{a\cdot a}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{a^2}{8}$

15) $\angle 8$ и $\angle 12$ – смежные углы $\Rightarrow \angle 8 + \angle 12 = 180^\circ$ (по теореме о смежных углах)

$\Rightarrow \angle 12 = 180^\circ - \angle 8 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

16) ΔFGE – прямоугольный ($\angle 12 = 90^\circ$ – п. 15) (по определению)

по теореме Пифагора имеем: $FE^2 = FG^2 + GE^2 \Rightarrow GE = \sqrt{FE^2 - FG^2} =$

$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot 8}{2} - \frac{5a^2}{16}} = \sqrt{\frac{8a^2 - 5a^2}{16}} = \sqrt{\frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$S_{\Delta FGE} = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot GE = \frac{a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{3}}{4 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{32}$

17) $S_{GECF} = S_{\Delta FCE} + S_{\Delta FGE} = \frac{a^2 \cdot 4}{8} + \frac{a^2\sqrt{15}}{32} = \frac{4a^2 + a^2\sqrt{15}}{32} =$

$= \frac{a^2(4 + \sqrt{15})}{32}$

18) остаётся сравнить $S_{\dots} = (\dots) S_{\dots}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 4 1 6

$\frac{a^2(4+\sqrt{15})}{32}$ и $\frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$ $|\cdot 32$ будем производить равносильные преобразования

$a^2(4+\sqrt{15})$ и $5a^2\sqrt{3}$ $|:a^2$

$4+\sqrt{15}$ и $5\sqrt{3}$

$\frac{S_{GECF}}{S_{\triangle AGF}} = \frac{a^2(4+\sqrt{15})\cdot 32}{32\cdot 5a^2\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{15}}{5\sqrt{3}}$

$\sqrt{15} < \sqrt{16}$, т.к. $15<16$

$\sqrt{15} < 4$

$1{,}7^2 = 2{,}89$

$\sqrt{3} > \sqrt{2{,}89}$, т.к. $3 > 2{,}89$

$\sqrt{3} > 1{,}7$

получим: $4+\sqrt{15} < 4$ и $5\sqrt{3} > 1{,}7$, значит

$4+\sqrt{15} < 8$, а $5\sqrt{3} > 8{,}5$

становится очевидным, что $4+\sqrt{15} < 5\sqrt{3}$

Ответ: $S_{GECF} < S_{\triangle AGF}$; $\frac{S_{GECF}}{S_{\triangle AGF}} = \frac{4+\sqrt{15}}{5\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $S_{GECF} < S_{\triangle AGF}$

№5.

$y = \sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$; $y=f(x)$

$1-\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$

$1+ctg^2 x = 1^{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ - основное тригонометрическое тождество

$x^2-6x+9 = (x-3)^2$

получим: $y = \sqrt{\sin^2 x}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}\cdot|x-3| = \sqrt{1}\cdot|x-3| = |x-3|$

$y = |x-3|$ - график получен применением графика функции $y=|x|$ путём сдвига вдоль оси OX на 3 ед. отрезка вправо

$y = |x|$

$y = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0 \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$

$y = x$, если $x \geq 0$

x	0	2
y	0	2

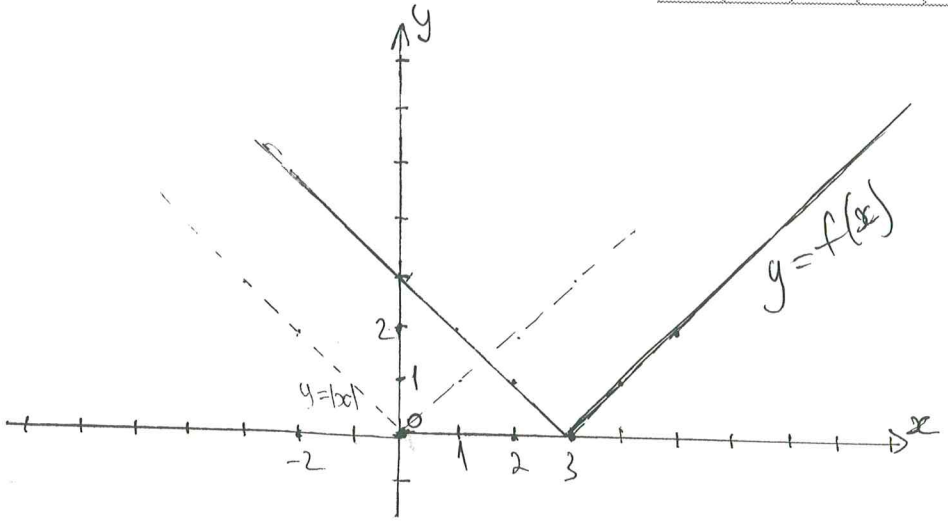
$y = -x$, если $x < 0$

x	-2	0
y	2	0

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 35416



№3? (-1)

15б

№4.

Решение: обозначим минутную стрелку через м, а часовую - через ч.

2) найдём скорости стрелок: $v_ч = \frac{360}{12 \cdot 60} = 0{,}5^\circ$/мин

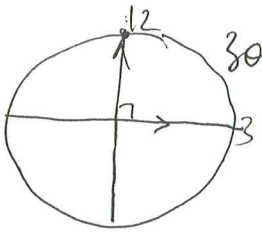
$v_м = \frac{360}{60} = 6^\circ$/мин

360° - круг, время

это за путь,

тогда t прохождения м - это 60 мин, а ч - 12·60 мин

(за 1 круг)

3) 

за 3т ч пройдёт путь в 0,5·180 = 90°

когда м и ч встретятся, то их пути от 0ч

сравняются, а время прохождения ч от 3 до отрез-

ённого момента встреч равно времени движения минутной

стрелки от 0 до этого отрезённого момента. ч пройдёт

0,5t°, а м - 6t°. Учитывая условие их встречи, составим

уравнение ур-ние: $90 + 0{,}5t = 6t$

$5{,}5t = 90 \mid :5{,}5$

$t = 16\frac{4}{11}$ мин

5б

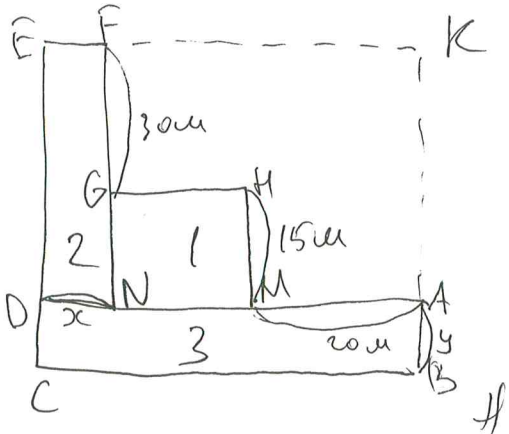
Ответ: через $16\frac{4}{11}$ мин

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 4 1 6

№6.



$MA = 20м$; $GF = 30м$; $MH = 15м$; $GA \geq 20м$

Найти: min длина ограждения ?

Возможные значения BK, KE и GH

Решение:

1) отталкиваемся от GH: $GH \geq 20м$, пусть $GH = 20м$

тогда $S_1 = 15 \cdot 20 = 300м^2$ (т.к. прямоугольник) $\Rightarrow S_2 + S_3 = 2100 - 300 = 1800м^2$

2) пусть $DN = x$, $AB = y$

тогда $S_2 = x \cdot 45$, $S_3 = (20+20+x)y = (40+x)y$

$S_2 + S_3 = 1800 \Rightarrow 45x + (40+x)y = 1800$

$45x + 40y + xy = 1800$

$45x + xy = 1800 - 40y$

$x(45+y) = 1800 - 40y$

(45+y) : 10; (1800 − 40y) : 10; всё : 10

- пусть $y = 15$, тогда

$1800 - 40 \cdot 15 = 1800 - 600 = 1200$

$x(45+15) = 1200$

$60x = 1200$

$x = 20$

тогда длина ограждения равна $(45+15) \cdot 2 + (20+20+20) \cdot 2 =$

$= 60 \cdot 2 + 60 \cdot 2 = 120 + 120 = 240м$.

Возможные значения длин сторон ?

205