ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 2 3 7 0

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания УГТУ (г. Ухта)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	10	0	6	17	30					63	шестьдесят три	

Задание 1.

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0$

Введем функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$

Найдем производную данной функции:

$g(x) = f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 24x - 24$

Теперь найдем производную $g(x)$

$k(x) = g'(x) = f''(x) = 12x^2 - 24x + 24$

Пусть $12x^2 - 24x + 24 = 0$ — 0б

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$D = 4 - 8 = -4 \rightarrow k(x)$ - монотонна на всей своей области определения

Т.к. $k(x)$ - монотонна, то и ее первообразная $g(x)$ - тоже, она и исходная функция $f(x) \longrightarrow f(x) = 0$ не имеет решений, т.к. любое значение $f(x)$ будет положительным.

Задание 2.

$(4-\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^x \leq 62$

$4 - \sqrt{15} = \sqrt{16} - \sqrt{15} \rightarrow$ больше нуля $\rightarrow (4-\sqrt{15}) > 0 \rightarrow$ мы можем умножить обе части неравенства на $(4-\sqrt{15})^x$ без изменения знака неравенства и получим

$(4-\sqrt{15})^{2x} + (4+\sqrt{15})^x \cdot (4-\sqrt{15})^x \leq 62(4-\sqrt{15})^x$

$(4-\sqrt{15})^{2x} + (16-15)^x \leq 62(4-\sqrt{15})^x$

$(4-\sqrt{15})^{2x} - 62(4-\sqrt{15})^x + 1 \leq 0$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 2 3 7 0

Пусть $(4-\sqrt{15})^x = a$, тогда неравенство примет вид:

$a^2 - 62a + 1 \le 0$

Введем функцию $f(a) = a^2 - 62a + 1$

$f(a) = 0$ при:

$a^2 - 62a + 1 = 0$

$D = 62^2 - 4 = 62^2 - 2^2 = (62-2)(62+2) = 60\cdot 64 = 64\cdot 4\cdot 15 = 256\cdot 15 = (16\sqrt{15}$

$a = \frac{62 \pm 16\sqrt{15}}{2}$

$a = 31 \pm 8\sqrt{15}$

$31-8\sqrt{15}$ $31+8\sqrt{15}$ a

$+$ $-$ $+$

$\Rightarrow f(a) \le 0$ при $a \in [31-8\sqrt{15}; 31+8\sqrt{15}]$

$(31 - 8\sqrt{15}) = 15 + 16 - 8\sqrt{15} = (\sqrt{15})^2 - 2\sqrt{15}\cdot 4 + 4^2 = (\sqrt{15}-4)^2 = (4-\sqrt{15})^2$

$(31 + 8\sqrt{15}) = (\sqrt{15}+4)^2$

① $(4-\sqrt{15})^x \ge 31 - 8\sqrt{15}$

$(4-\sqrt{15})^x \ge (4-\sqrt{15})^2$

$x \le 2$ (т.к. $(4-\sqrt{15}) < 1$)

Х 10б.

② $(4-\sqrt{15})^x \le 31 + 8\sqrt{15}$

$(4-\sqrt{15})^x \le (4+\sqrt{15})^2$

$(4-\sqrt{15})^2\cdot(4-\sqrt{15})^x \le (4+\sqrt{15})^2\cdot(4-\sqrt{15})^2$

$(4-\sqrt{15})^2\cdot(4-\sqrt{15})^x \le (16-15)^2$

$(4-\sqrt{15})^2\cdot(4-\sqrt{15})^x \le 1$

$(4-\sqrt{15})^{x+2} \le 1$

$(4-\sqrt{15})^{x+2} \le (4-\sqrt{15})^0$

$x+2 \ge 0$ (т.к $(4-\sqrt{15}) < 1$)

$x \ge -2$

Получаем что $x \le 2$ и $x \ge -2 \Rightarrow x \in [-2; 2]$

Ответ: $x \in [-2; 2]$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 2 3 7 0

Задание 3

$y = \sin^2 x$

$y' = \underline{2\sin x}$

$y'' = 2\cos x$

$y''' = -2\sin x$

$y'''' = -2\cos x$

$y''''' = \underline{2\sin x}$

Видим что производная 1го порядка будет равна производной 5го порядка, а значит

$(y^{(1)}) = (y^{(5)}) = (y^{(9)}) = (y^{(4n+1)})$, где $n \in N$

Тогда $(y^{(1)}) = (y^{(4\cdot 504+1)}) = (y^{(2017)}) = 2\sin x$

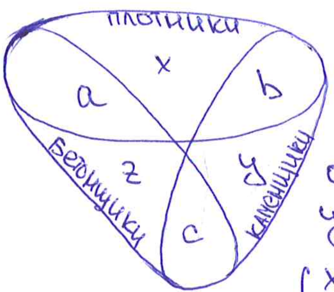
$(y^{(2018)}) = (y^{(2017)})' = 2\cos x$

$(y^{(2019)}) = -2\sin x$

−0б.

Ответ: $-2\sin x$

Задание 4



Т.к. у каждого может быть максимум 2 профессии, то схема их распределения будет как представлена на рисунке. Обозначим каждое получившееся множество на рисунке переменными и составим систему уравнений исходя из условия задачи:

$$\begin{cases} x+y+z+a+b+c = 32 \\ a+b+c = 2+x+a+b \\ (a+x+b) = 2(a+z+c) \\ (a+z+c) = n(c+y+b) \end{cases}$$

$a, b, c, x, y, z \geq 0$

~~Получаем, что: a = 2+x~~

$$\begin{cases} \cancel{2x+2+b = 4+2x+2z+2c} \\ \cancel{2+x+z+c = n(c+y+b)} \end{cases}$$

~~b = 2(1+z+c)~~

$$\begin{cases} c = 2+x \\ a+x+b = 2a+2z+4+2x \\ a+z+2+x = n(2+x+y+b) \end{cases}$$

при n = 3:

$$\begin{cases} a+x+b = 2a+2z+2x+\dots \\ a+z+x+2 = 3x+6+3y+3\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+x+2z+4-b = 0 \\ a-2x+z-3y-3b-4 = 0 \end{cases}$$

+6б

$\dfrac{a+x+b}{a+z+x+2} = 2$ и $\dfrac{a+z+c}{c+y+b} = n$

$$\begin{cases} 2x+y+z+a+b = 30 \\ a+x+b = 2(a+z+x+2) \\ a+z+x+2 = n(x+2+y+b) \end{cases}$$

~~$n \neq 20$ и $n \neq 19$, т.к. тогда $a+z+c = a+z+x+2$ будет меньше 2^x, что невозможно~~

при $n = 18$:

~~$a+z+c = 18(c+y+b)$~~

~~$a+x+b = 2(a+z+c)$~~ $\to$ ~~$a=0$, $z=0$~~

$a+z+c = 8$ ~~$y=0$, $b=0$~~

$n \leq 16$, т.к. $(c+y+b) \geq 2$

при $n = 16$:

~~$a+z+x+2 = 32$~~

~~$a+z+x = 30$~~

~~$c = 2$~~

~~$y = 0$~~

~~$b = 0$~~

$a+z+c = 8c = 16$

$a+z = 14$

$y = 0$; $b = 0$

$a+x+b = 32 \to a = 32$, $a+x = 32$

Ответ: ...

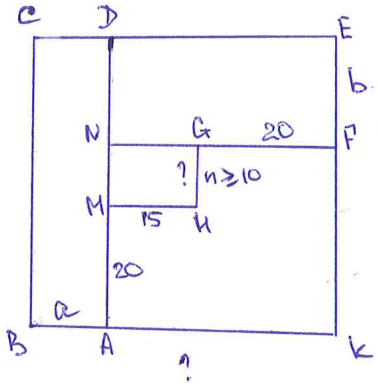
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 2 | 3 | 7 | 0 |

Задание 5



Пусть $BA = a$; $GH = n$; $EF = b$, тогда:

$a(20+n+b) + b(15+20) + 15n = 1600$

$20a + an + ab + 35b + 15n = 1600$

$a(20+n) + b(35) + ab + (15n - 1600) = 0$

$P = (b+n+20+a+15+20)\cdot 2 = (a+b+n+55)\cdot 2 =$

$= 2(a+b+n) + 110$ — длина ограждения

P — минимальна, при $(a+b+n)$ — минимальном

$f(n) = an + 15n + ab + 20a + 35b - 1600 = (a+15)n + (ab + 20a + 35b - 1600) =$

~~f(n) ≥ 0 тогда~~

$f'(n) = a + 15$

+ 17б.

откуда?

$f(a) = a(20+n+b) + 35b + 15n - 1600$

$f'(a) = 20 + n + b$

При $n = 10$: $20a + 10a + ab + 35b + 150 = 1600$

$30a + ab + 35b = 1450$

При $n = 1$: $21a + 35b + ab - 1585 = 0$

~~$21a + 36b = 158$~~

$9a = 135$

$a = 15$

откуда?

тогда: $300 + 15n + 15b + 35b + 15n = 1600$

$30n + 50b = 1300$

$3n + 5b = 130$

$3n \in [3; 30]$

$5b \in [12{,}7; 100]$ $\Big| \rightarrow$ $n = 10$, $b = 20$

$P = (20 + 10 + 15 + 55)\cdot 2$

$= 200$

$BK = a + 35 = 15 + 35 = 5$

$KE = b + n + 20 =$

$= 20 + 20 + 10 = 50$

Ответ: 200; $BK = 50$; $KE = 50$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 2 | 3 | 7 | 0

Задание 6.

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x^2+xz+z^2=9 \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2=4+xy \\ (x+z)^2=9+xz \\ (y+z)^2=36+yz \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7-z)^2=4+xy \\ (7-y)^2=9+xz \\ (7-x)^2=36+yz \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7-z)^2-2^2=xy \\ (7-y)^2-3^2=xz \\ (7-x)^2-6^2=yz \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7-z-2)(7-z+2)=xy \\ (7-y-3)(7-y+3)=xz \\ (7-x-6)(7-y+6)=yz \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-z)(9-z)=xy \\ (4-y)(10-y)=xz \\ (1-x)(13-y)=yz \end{cases}$$

Сложив все 3 уравнения получаем, что:

$2x^2+2y^2+2z^2+xy+yz+zx=49$

$(x+y+z)^2=49$

$x+y+z=7$, т.к. все числа - положительные

Т.к. xy, xz и yz - положительные, то оба первых множителя в уравнениях должны иметь отрицательный или положительный знак, но т.к. $x, y, z<7$, то они оба могут быть только положительными

$$\longrightarrow \begin{cases} 1-x>0 \\ 4-y>0 \\ 5-z>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<1 \\ y<4 \\ z<5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2+xy+y^2)-(x^2+xz+z^2)=4-9 \\ (x^2+xz+z^2)-(y^2+yz+z^2)=9-36 \\ (x^2+xy+y^2)-(y^2+yz+z^2)=4-36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y-z)+(y+z)(y-z)=4-9 \\ z(x-y)+(x+y)(x-y)=9-36 \\ y(x-z)+(x+z)(x-z)=4-36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y+z)(z-y)=5 \\ (x+y+z)(y-x)=27 \\ (x+y+z)(z-x)=32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-y=5/7 \\ y-x=27/7 \\ z-x=32/7 \end{cases}$$

Получаем: $(z-y)+(z-x)=\frac{5}{7}+\frac{32}{7}$

$2z-(x+y)=\frac{37}{7}$

$x+y=2z-37/7$

Т.к. $x+y+z=7$, то $3z-\frac{37}{7}=7$

$3z=\frac{49+37}{7}$

$3z=\frac{86}{7}$

$z=86/21=4\,{}^{2}/_{21}$

$z=4\frac{2}{21}$

$\Downarrow$

$y=4\frac{2}{21}-\frac{5}{7}=\frac{86-15}{21}=\frac{71}{21}=3\frac{8}{21}$

$\Downarrow$

$x=\frac{71}{21}-\frac{27}{7}=\frac{71-81}{21}=-\frac{10}{21}$

Ответ: $x=-\frac{10}{21}$; $y=\frac{71}{21}$; $z=\frac{86}{21}$

(уравнения не может быть решено только в положительных x, y, z)

+ 30б