

ШИФР

3 2 7 5 3

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания Санкт-Петербургский государственный горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	1	2	15	20	2	2	42	сорок два	

Задача 1

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 12(x^2 - 2x + 2) = 0$$

это ~~многочлен~~ больше 0, т.к. $D < 0$
значит $12(x^2 - 2x + 2) > 0$

$$x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4)$$

$$\text{если } x = 4, \begin{cases} 12/x^2 - 2x + 2 = 0 \\ 12(x^2 - 2x + 2) > 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\text{если } x > 4, x^3(x - 4) + 12(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\text{если } 0 \leq x < 4, \text{ например, } x = 3, \text{ тогда } 27(3 - 4) + 12(9 - 6 + 2) =$$

$$\text{так будет на всем промежутке } = -27 + 12 \cdot 5 > 0$$

$$\text{если } x < 0, x^3(x - 4) + 12(x^2 - 2x + 2) = 0$$

положительное $\emptyset$

в случае с
дробью аналогичная
исходящая

4.т.г.

Задача 2

$$(4 - \sqrt{15})^x + (4 + \sqrt{15})^x \leq 62$$

Поскольку $(4 - \sqrt{15})^x > 0$ и $(4 + \sqrt{15})^x > 0$, функции

$$y = (4 - \sqrt{15})^x$$

$y = (4 + \sqrt{15})^x$, значить, бо́льшему значению x бо́льший y .

Задача 2 (продолжение).

Тогда рассмотрим сумму $(4-\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^x = 62$,

Очевидно, что при $x=2$ $(16-8\sqrt{15}+15) + (16+8\sqrt{15}+15) =$
 $= 31+31=62$

$\Rightarrow$ Значит, при большем значении x будет больше y .

Если $x \leq 2$, то значение скобок будет меньше

$$\begin{cases} (4-\sqrt{15})^x < 16-8\sqrt{15}+15 \\ x < 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (4+\sqrt{15})^x < 16+8\sqrt{15}+15 \\ x < 2 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\underline{x \leq 2}$$

Ответ: $x \leq 2$

Задача 3

$$y = \sin^2 x \quad y^{2019}?$$

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y'' = 2 \cos 2x$$

$$y''' = -4 \sin 2x$$

$$y^{IV} = -8 \cos 2x$$

$$y^{(5)} = 16 \sin 2x$$

$$y^{(6)} = 32 \cos 2x$$

$$y^{(7)} = -64 \sin 2x$$

Замечим, что

перед тригонометрической функцией стоят степени двойки. Причём степень равна порядковому номеру производной-1.

$\Rightarrow$ коэффициент перед 2019-ой производной будет 2018.

Теперь разберёмся с функцией.

На чётных местах $\cos^2 x$, на нечётных $\sin^2 x$.

$\Rightarrow$ на 2019 месте будет $\sin^2 x$.

Знак? Знак повторяется через две производные.

1, 2-ые произв. +

3, 4-ые производные -

5, 6-е +

7, 8-е -

9, 10 +

11, 12 -

13, 14 +

15, 16 -

17, 18 +

19, 20 -

Аналогично будет и с 2000... 2001, 2002 + 2003, 2004 - 2005, 2006 + 2007, 2008 - 2009, 2010 +

Задание 3 (продолжение)

Наконец дойдя до 2019 производной, мы определим знак.

2019 производная будет со знаком —.

Тогда $y^{(2019)} = -2^{2018} \cdot \sin 2x$

Ответ: $-2^{2018} \cdot \sin 2x$

Задание 4

32 бойца

каменщик, бетонщик, плотник

Пусть каменщиков $2x$, бетонщиков x , плотников $2x$
 y — количество бойцов с 2-ми профессиями.

$$\begin{cases} 2x + x + 2x - y = 32 \\ 3 \leq x \leq 20 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + x + 2x - 2x - 2 = 32 \\ 3 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + x = 34 \\ 3 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2n+1) = 34 \\ 3 \leq n \leq 20 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$34 = 34 \cdot 1 = 1 \cdot 34 = 2 \cdot 17 = 17 \cdot 2$$

$$2n+1 \neq 1 \quad 2n+1 \neq 34$$

$$2n+1 \neq 2 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2n+1 = 17$$

$$n = 8$$

$$\boxed{x=2}$$

Тогда бойцов с двумя

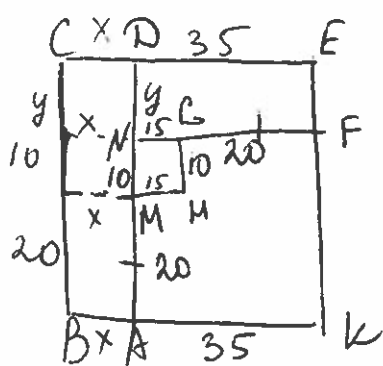
профессиями $y = 2x + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \Rightarrow$ с одной профессией $32 - 6 = 26$.

Ответ: 26.

ШИФР

3 2 7 5 3

Задача 5



Для того, чтобы
длина ограды была наименьшей,
GH надо брать наименьшей, то есть
10.

Обозначим $AB=x$, $DN=y$.

Тогда $(x+35)y + 35y + 150 + x(y+30) = 1600$
 $35y + 150 + xy + 30x = 1600$
 $35y + xy + 30x = 1450$, x, y - наименьшее



Задача 6

x, y, z - натур.

Значит, $z > y > x$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 + xz + z^2 = 9 \end{cases}$$

$$xz - xy + z^2 - y^2 = 5$$

$$(z-y)(x+y+z) = 5 \Rightarrow z > y$$

$$\begin{cases} x^2 + xz + z^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

$$y^2 - x^2 + yz - xz = 27$$

$$(y-x) \cdot (x+y+z) = 27, \Rightarrow y > x$$

