ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Газпром

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 3 8 0 3

Класс 11 Вариант 2 1 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	0	20	20	30					85	Восемьдесят пять	~~[illegible]~~

№1 $y=e^{-x}$ $\qquad y^{IV}=(y')'=y''=y$

$y'=-e^{-x}$

$y''=-(e^{-x})'=-y'=e^{-x}=y$

$y'''=(e^{-x})'=y'$

+

Заметим, что производные чётного порядка равны y, а нечётного порядка равны y'.

Т.к. 2018 – ~~четное~~ чётное, то $y^{(2018)}=y=e^{-x}$ $\qquad$ Ответ: $y^{(2018)}=e^{-x}$

№2. Пусть $\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$, значит $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, а тогда $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$,
$\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\qquad$ т.к. ~~$\sin\alpha>$~~ $0<\sin\alpha<1$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, $\quad\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$, $\quad\cos\alpha=\pm\frac{3}{5}$

Т.к. $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$, то $\cos\alpha>0$, а значит $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

Тогда $tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $tg\,\alpha=\frac{4}{3}$

Пусть $\beta=\arccos\frac{7}{25}$, значит $\cos\beta=\frac{7}{25}$, а тогда $\beta\in(0;\frac{\pi}{2})$,
$\beta\in[0;\pi]$ $\qquad$ т.к. $0<\cos\beta<1$

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$, $\quad\sin^2\beta=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}$, $\quad\sin\beta=\pm\frac{24}{25}$

Т.к. $\beta\in(0;\frac{\pi}{2})$, то $\sin\beta=\frac{24}{25}$.

Пусть $\gamma=arctg\frac{4}{3}$, тогда $tg\,\gamma=\frac{4}{3}$, а значит $\gamma=\alpha$.
$\gamma\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$A=2\alpha+\beta$ – ?

$\sin(2\alpha+\beta)=\sin2\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cancel{\sin\beta}\,\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot$
$\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\cdot(\frac{9}{25}-\frac{16}{25})=\frac{7}{25}\cdot\frac{24}{25}-\frac{24}{25}\cdot\frac{7}{25}=0$

№2 (продолжение)

Т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$, то $(2\alpha+\beta) \in (0; \frac{3\pi}{2})$

Т.к. $\sin(2\alpha+\beta)=0$, то $2\alpha+\beta=\pi$, а значит $A=\pi$.

$2\alpha+\beta=\pi n, n\in Z$

+

Ответ: $A=\pi$

№5. 1) $y=6x+x^2$

$D(y)=R$

$y'=6+2x=2(3+x)$

$D(y')=R$, критических точек нет

$y'=0$, если $x=-3$

y': $-$ | $+$ (на оси x, точка -3)

y: $\searrow$ -3 min $\nearrow$

$x_{min}=-3$

2) $y_{кас}=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

В точке $x_0=-2$

$y(-2)=-12+4=-8$

$y'(-2)=2(3-2)=2$

$y_{кас}=-8+2(x+2)$

$\underline{y_{кас}=2x-4}$

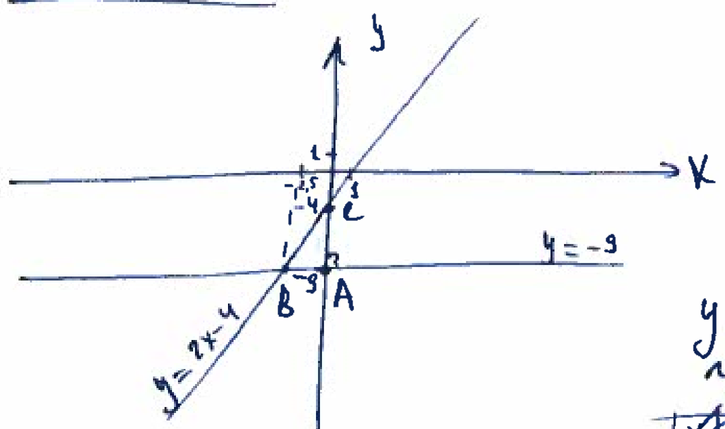
В точке $x_0=-3$

$y(-3)=-18+9=-9$

$y'(-3)=0$

$\underline{y_{кас}=-9}$

3)



прямая $y=-9$ параллельна оси абсцисс и перпендикулярна оси ординат, пересекает ось ординат в точке $A(0;-9)$

$y=2x-4$ – линейная функция, графиком является прямая

~~x~~	~~-9~~	~~0~~
~~y~~	~~-9~~	

x	-2,5	0
y	-9	-4

$y=2x-4$ пересекает $y=-9$ в точке $B(-2,5;-9)$,

$y=2x-4$ пересекает Ос ординат в точке $C(0;-4)$

ΔABC – искомый

ШИФР 3 3 8 0 3

№5 (продолжение)

Т.к. $AC \perp AB$, то $\triangle ABC$ – прямоугольный.

$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$

$AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = |x_A - x_B| = 2{,}5$

$AC = \sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} = |y_A - y_C| = |-4-(-9)| = |5| = 5$

$S_{\triangle ABC} = \frac{5 \cdot 5}{4} = \frac{25}{4} = 6{,}25$

+

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 6{,}25$.

№4.

1) $x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = \frac{3x\ln(y-4)}{3\ln 5} - 2x^3$ ОДЗ: $y>4$

$x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = x \cdot \log_5(y-4) - 2x^3$

Пусть $k = \log_5(y-4)$, тогда

$x^2 \cdot k - 2x^2 = x \cdot k - 2x^3$

$x^2(k-2) = x(k-2x^2)$

$x=0$ или $2x^2 + x(k-2) - k = 0$

$D = (k-2)^2 + 8 \cdot k = k^2 - 4k + 4 + 8k = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$

$x_{1;2} = \frac{2-k \pm |k+2|}{4} = \frac{2-k\pm(k+2)}{4}$

$x_1 = 1$ $x_2 = -\frac{k}{2}$

$x_2 = -\frac{\log_5(y-4)}{2}$

2) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \\ x=-\frac{\log_5(y-4)}{2}, \end{array}\right. \\ 2xy - 8x = x^2(y-4)+1. \end{cases}$

1. Если $x=0$, то $2y \cdot 0 - 8 \cdot 0 = 0 \cdot (y-4)+1$

$0 = 1$ – не верно

2. Если $x=1$, то $2y - 8 = y - 4 + 1$

$y = 5$

С учетом ОДЗ: $y=5$ – верно

Значит, $(1;5)$ – решение системы.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 3 8 0 3

№4 (продолжение)

3. $\begin{cases} x=-\dfrac{\log_5(y-4)}{2}, \\ y>4, \\ 2xy-8x=x^2(y-4)+1. \end{cases}$

$2x(y-4)=x^2(y-4)+1$

$x^2(y-4)-2x(y-4)+1=0 \quad |:(y-4)$, т.к. если $y=4$, то $x^2\cdot 0+-2x\cdot 0+1=0$, $1=0$ – не верно, значит, $y\neq 4$, $y-4\neq$

$x^2-2x+\dfrac{1}{y-4}=0$

$D_1=1-\dfrac{1}{y-4}=\dfrac{y-5}{y-4}$

Если $D_1\geq 0$, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{\dfrac{y-5}{y-4}}$

Если $D_1<0$, то нет корней, а значит система не имеет решений.

Т.к. $\dfrac{y-5}{y-4}\geq 0$, $y-4>0$, то $y-5\geq 0$, $y\geq 5$

Значит, $\log_5(y-4)>\log_5(1)$, т.к. $y-4>1$, $\log_5 t$ – возрастает.

$\log_5(y-4)>0$

Значит, $x=-\dfrac{\log_5(y-4)}{2}<0$.

Т.к. $\sqrt{\dfrac{y-5}{y-4}}\geq 0$, то $x=1-\sqrt{\dfrac{y-5}{y-4}}$

$-\dfrac{\log_5(y-4)}{2}=1-\sqrt{\dfrac{y-5}{y-4}}$

$\log_5(y-4)=2\left(\sqrt{\dfrac{y-5}{y-4}}-1\right)$

$y-4=25^{\sqrt{\frac{y-5}{y-4}}-1}$

Пусть $y-4=a$, $a>0$, тогда $25a=25^{\sqrt{\frac{a-1}{a}}}$

т.к. $\dfrac{a-1}{a}\geq 0$, $a>0$, то $a-1\geq 0$, $a\geq 1$

Т.к. $\dfrac{a-1}{a}=1-\dfrac{1}{a}<1$, то $\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}<1$, $25^{\sqrt{\frac{a-1}{a}}}<25^1$

$-1<a$

$25^{\sqrt{\frac{a-1}{a}}}<25$

$25a<25$

$a<1$ – неверно

~~Т.к. $a>0$, $a<1$, то $\frac{1}{a}>1$, $\frac{1}{a}<-1$, тогда $\frac{a-1}{a}<0$, что не верно, т.к.~~

Ответ: $(1;5)$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 3 8 0 3

№3. Пусть k – количество процентов, $k \in [95,2; 98,2]$, x – количество деталей в этой партии, тогда количество деталей соответствующих стандартам равно $s=\frac{kx}{100}$, причём $s=\frac{kx}{100}$ – целое., $kx \vdots 100$, $kx \vdots 25$

~~Пре~~ 1) Если k – целое, то k может быть равно 96, 97, 98, ни одно из этих чисел не делится на 5, а значит $x \vdots 5$, $x \vdots 25$. Тогда $x \geq 25$.

Если $x=25$, то $k \vdots 4$. Пусть $k=96$, тогда в партии 25 деталей, из которых 96%, т.е. 24 детали соответствуют стандартам.

2) Если k – не целое, то $kx = s\cdot 100$ – целое

Пусть $k=\overline{ab,c_1\ldots c_n} = 10a+b+\frac{\overline{c_1\ldots c_n}}{10^n}$, $a=9$, $c_n\neq 0$, $a,b,c_1,\ldots,c_n$ – цифры

$$10a\cdot x+bx+x\cdot\frac{\overline{c_1\ldots c_n}}{10^n}=s\cdot 100$$

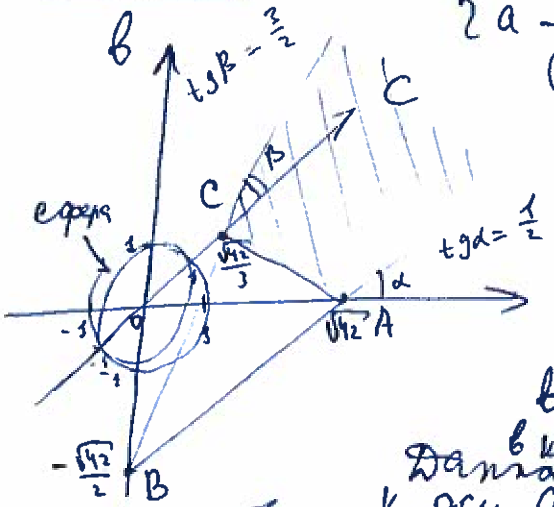
$\overline{c_1\ldots c_n}\cdot x \vdots 10^n$

а значит ~~либо~~ $c_n=2$, $x=5$ или $c_n=5$, $x=2$ или $c_{n-i}=9$, $i\geq 2$

Ответ: 25

№6. Пусть $x^4=a$, $y^4=b$, $z^4=c$, причём получается, что $a,b,c\geq 0$

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & \text{— уравнение сферы радиуса 1} \\ a-2b+3c=\sqrt{42} & \text{— уравнение плоскости.}\end{cases}$$



Рассмотрим плоскость! Она проходит через точки $A(\sqrt{42};0;0)$, $B(0;-\frac{\sqrt{42}}{2};0)$, $C(0;0;\frac{\sqrt{42}}{3})$. Значит, $\triangle ABC$ принадлежит данной плоскости.

Т.к. $b>0$, то нас интересует часть плоскости, которая находится выше плоскости (COA) в том пространстве, в котором нет точки B.

Данная плоскость проходит под острым к оси a и к оси c.

~~Т.к.~~ Так же нас интересует та часть сферы где $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$.

Т.к. $\sqrt{42}>1$, $\frac{\sqrt{42}}{3}>1$ ($42>9$), то ~~сфера часть эта часть~~ сфера не пересекает данную плоскость выше плоскости (COA), а значит, система не имеет решений.

Ответ: нет решений