ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 4 6 1

Класс 11 **Вариант** 21 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	13	20	20	0					68	Шестьдесят восемь	[illegible]

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 37461

Задание 1.

$y = e^{-x}$.

Производная 1 порядка:

$y' = (e^{-x})' = (-1) \cdot e^{-x} = -e^{-x}$

Производная 2 порядка:

$y'' = (-e^{-x})' = (-1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}$

Производная 3 порядка:

$y''' = (e^{-x})' = -e^{-x}$

Производная 4 порядка:

$y'''' = (-e^{-x})' = e^{-x}$

Очевидно, что для данной функции значение производной чередуется. Для нечётного порядка производная равна $-e^{-x}$, для чётного e^{-x} соответственно для 2018-го порядка производная будет равна e^{-x}

Ответ: e^{-x}

$y^{(2018)} = e^{-x}$

+

Задание 3.

Количество деталей, соответствующих стандартам, ~~находится~~ выраженное в процентах, находится как $\frac{\text{кол-во соотв. ст деталей}}{\text{общее кол-во деталей}} \cdot 100\%$. Значит:

$\frac{y_1}{x} = \frac{952}{1000}$

$\frac{y_2}{x} = \frac{982}{1000}$

При этом, y_1, y_2 и x - числа целые, а x — наименьшее возможное

Сократим дроби:

$\frac{952}{1000} = \frac{476}{500} = \frac{238}{250} = \frac{119}{125}$.

$\frac{982}{1000} = \frac{491}{500}$. Чтобы числа оставались целыми, дальше сокращать нельзя. Значит, наименьшее x, при котором процент деталей,

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 4 6 1

Продолжение задания 3.

соответствующих стандартам, лежит на границе интервала, это 500 Однако, количество исправных деталей может лежать в интервале от 95,2% до 98,2%, например, быть равно 96%.

Тогда:

$\frac{y}{x}=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}$. Т.е. при партии из 25 деталей условие выполнится

При партии из 20 деталей оно уже не выполнится:

$\frac{20}{20}=100\%$. $\frac{19}{20}=0{,}95=95\%<95{,}2\%$

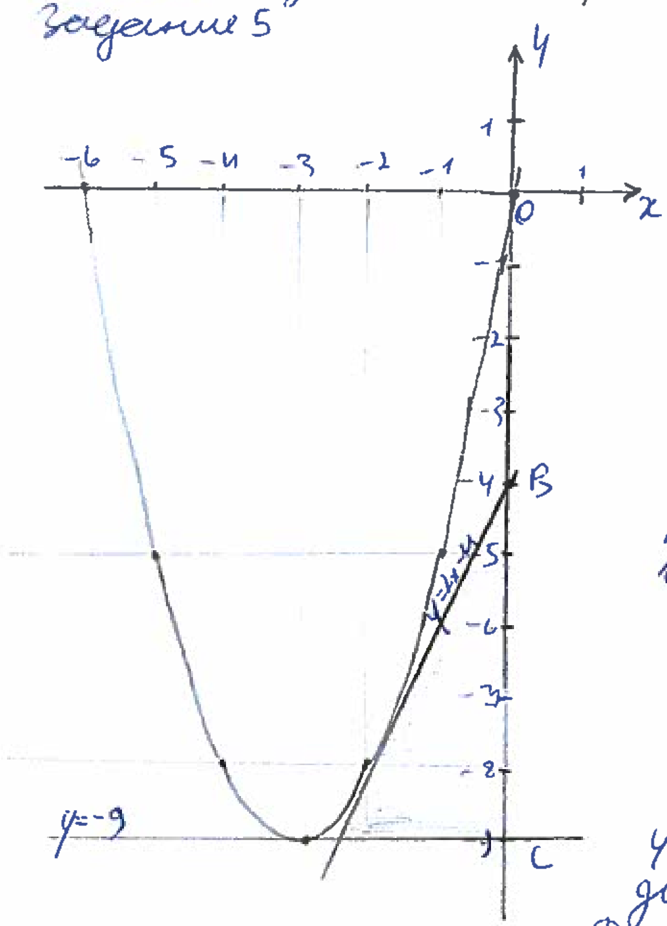
±

Если партия состоит из 21 детали:

$\frac{20}{21}=95{,}23...\%>95{,}2\%$ Условие выполнится. Таким образом, наименьшее возможное количество деталей в партии 21.

Ответ: 21 деталь

Задание 5



$y=x^2+6x$. Функция квадратичная, график — парабола. $a=1>0$, значит, ветви направлены вверх.

$x_в=\frac{-b}{2a}=-3$

$y_в=-9$

$(-3;-9)$ — вершина параболы $x=-3$ — ось симметрии.

x	-2	-4	-1	-5	0	-6
y	-8	-8	-5	-5	0	0

Первая касательная к графику функции $y=x^2+6x$ проходит через точку $(-2;-8)$. Угловой коэффициент этой касательной равен значению производной $y'(x)=2x+6$ в точке касания, т.е. $k=2\cdot(-2)+6=2$.

Решим уравнение:

$y=2x+b$,

$-8=-4+b$,

$b=-4$.

Значит, уравнение первой касательной $y=2x-4$. Вторая касательная проводится к точке минимума функции. Для любой квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом точка минимума — вершина параболы, значит, вторая касательная проходит через точку $(-3;-9)$. Производная $y=x^2+6x$ в точке минимума равна 0, значит, угловой коэффициент второй касательной равен 0, и её уравнение:

$y=-9$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 4 6 1

Продолжение задания 5

Искомый треугольник – $\triangle ABC$ (см. чертёж). Для нахождения его площади нужно найти координаты пересечения касательных с осью ординат и друг с другом.

$2x - 4 = -9,$

$2x = -5,$

$x = -2{,}5.$

$(-2{,}5; -9)$ – точка пересечения касательных, A.

~~$x=0$~~,

~~$x=$~~

$-4 = y.$ $(0; -4)$ – точка пересечения $y = 2x - 4$ с осью Oy, B.

$y = -9$. $(0; -9)$ – точка пересечения $y = -9$ с осью Oy, C.

Т.к. $y = -9$ параллельна оси абсцисс и перпендикулярна оси ординат, то $\triangle ABC$ – прямоугольный.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 5 = (2{,}5)^2 = 6{,}25$ (кв. ед.)

Ответ: 6,25 кв. ед.

+

Задание 2.

$A = \arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{7}{25} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$

Пусть $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, тогда $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ (~~по~~ по основному тригонометрическому тождеству). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$. Значит, $\arcsin\frac{4}{5}$ и $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ – это один и тот же угол.

$\alpha + \alpha = 2 \cdot \alpha.$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$

Значит, $A = \arccos\left(\frac{7}{25}\right) + \arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$. Но $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$

значит:

$A = \arccos\frac{7}{25} + \pi - \arccos\frac{7}{25} = \pi.$

Ответ: π.

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 4 6 1

Задание 4.

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^3 = \dfrac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^2; \\ 2xy - 8x = x^2(y-4)+1. \end{cases}$$

ОДЗ:

$y-4>0$,

$y>4$

$x^2 \cdot \dfrac{\ln(y-4)}{\ln 5} - 3 \cdot \dfrac{x \cdot \ln(y-4)}{3 \cdot \ln 5} = -2x^3+2x^2$,

$x \cdot \dfrac{\ln(y-4)}{\ln 5} \cdot (x-1) = -2x^2(x-1)$,

$x(x-1)\left(\dfrac{\ln(y-4)}{\ln 5}+2x\right)=0$,

$x=0$. $\quad x=1$. $\quad \log_5(y-4)+2x=0$,

Подставим во второе уравнение системы:

$0-0=0+1$. Нет решений. $x=0$ — посторонний корень

$2y-8=y-4+1$,

$y=5$

Проверка: $5>4$ Подходит

$(1;5)$ — решение системы.

$y-4=5^{-2x}$,

$y=5^{-2x}+4$

Подставим во второе уравнение:

$2xy-8x=x^2(y-4)+1$,

$y(2x-x^2)=8x-4x^2+1$,

$(5^{-2x}+4)(2x-x^2)=8x-4x^2+1$,

$5^{-2x} \cdot x(2-x)+8x-4x^2-8x+4x^2=1$,

$5^{-2x} \cdot x(2-x)=1$, $\quad 1 \cdot 5^{2x} \neq 0$

$x(2-x)=5^{2x}$.

Решение третьего уравнения можно найти, найдя точки пересечения графиков функций $y=-x^2+2x$ и $y=25^x$. $y=25^x$ принимает только положительные значения, значит, нам интересна только та часть координатной плоскости, где $y=-x^2+2x$ положительна. Т. к. $y=-x^2+2x$ — это квадратичная функция с ~~~~ отрицательным старшим коэффициентом, а точки пересечения с осью Ox этой функции $x=0$ и $x=2$, то она принимает положительные значения на интервале $x \in (0;2)$. Т. к. $x_в=1$, $y_в=1$, то максимальное значение 1 функция $y=-x^2+2x$ принимает в точке $(1;1)$ и на промежутке $[0;1]$ возрастает, после чего убывает. $y=25^x$ возрастает на всем промежутке $x \in (0;2)$. Для $y=-x^2+2x$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, а для $y=25^x$, $y(0)=1$, $y(1)=25$. Т. к. обе эти функции непрерывно возрастают на данных промежутках, то их графики не пересека

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a\cdot b)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 4 6 1

Продолжение задания 4.

Следовательно, уравнение $x(2-x)=5^{2x}$ решений не имеет, и вся система имеет одно решение $(1;5)$.

Ответ: $(1;5)$.

+