ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ЛИСТ 1

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 5 0 2

Класс 11 **Вариант** 21 **Дата Олимпиады** 09.02.19

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	0	0	15	20	28					68	Шестьдесят восемь	[illegible]

①

$y=e^{-x}$

$y^{(1)}=-e^{-x}$, $y^{(2)}=e^{-x}$, $y^{(3)}=-e^{-x}$ ...... $\Leftarrow$ $y^{(2k)}=e^{-x}$

$y^{(2k+1)}=-e^{-x}$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

$y^{(2018)}=e^{-x}$, т.к. 2018 – чётное число

$\boxed{\text{Ответ: } e^{-x}.}$

+

②

~~Преобразуем A:~~

~~$\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{7}{25}+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}=$~~

~~$=\arcsin \quad \arccos\frac{4}{5}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\arcsin$~~

~~$A=\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{7}{25}+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$~~

~~$\sin x\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{3}{5}$ $\quad \cos y=\frac{7}{25} \Leftrightarrow \sin y=\pm\frac{24}{25}$~~

СМ. ЛИСТ 2

5

$x_0 = -2$; $y = 6x + x^2$

$y' = 2x + 6$, $y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$

y': $-$ min $+$; -3 ; x ; y: $\searrow$ $\nearrow$

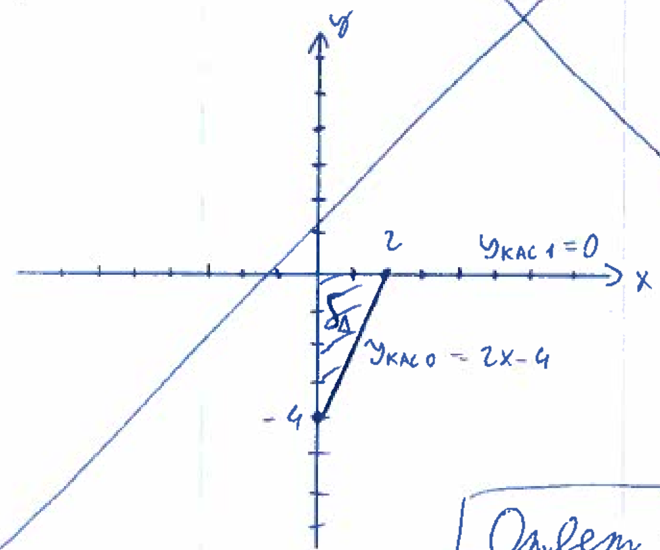
$\underline{y_{kac0}} = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = 2(x+2) - 12 + 4 = \underline{2x - 4}$

$\underline{y_{kac1}} = y'(x_1)(x - x_1) + y(x_1) = \cancel{0(x+3)}$ $0 \cdot (x+3) - 6 + 6 = \underline{0}$

$y_{kac0} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x = 0 \to y_{kac} \Leftrightarrow x = -4$

см. график



$S_\Delta = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \underline{4}$

$\boxed{\text{Ответ: } 4.}$

3

$P_1 = 0{,}952$; $P_2 = 0{,}982$; Пусть x – количество деталей

Тогда по условию: $\begin{cases} P_1 x \in N \\ P_2 x \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{119}{125} x \in N \\ \frac{491}{500} x \in N \end{cases} \Leftrightarrow$

$P_1 = 0{,}952 = \frac{952}{1000} = \frac{476}{500} = \frac{238}{250} = \underline{\frac{119}{125}}$

$P_2 = 0{,}982 = \frac{982}{1000} = \underline{\frac{491}{500}}$, 491 – простое число

?

$\Leftrightarrow x = 500$ (при меньшем x получится ненатуральное число, а количество деталей выражается натуральным числом)

$\boxed{\text{Ответ: } 500.}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ЛИСТ 3 **Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

ШИФР 4 5 5 0 2

(4)

~~$\cancel{x^3}$ (1) $\begin{cases} x^2\log_5(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x\ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^3 \\ 2xy - 8x = x^2(y-4)+1 \end{cases}$ (2)~~

~~Решим (2) как кв. ур. относительно x:~~

~~$x^2(y-4)+x(8-2y)+1=0$~~

~~$x^2(y-4)+2x(4-y)+1=0$~~

~~$\cancel{D = 4(4-y)^2 - 4(y-4) = 4(4-y-y+4)(4-y+y-4) = 4(-2y+8)\cdot 0 = 0}$~~

~~$D = 4(4-y)^2-(y-4)\cdot 4 = 4(4-y)(4-y+4)$~~

(6)

$$\begin{cases} x^8+y^8+z^8=1 & (1) \\ x^4-2y^4+3z^4=\sqrt{42} & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что: $\begin{cases} x^8\le 1 \\ y^8\le 1 \\ z^8 \le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4\le 1 \\ y^4\le 1 \\ z^4\le 1\end{cases}$, т.к.

~~т.к.~~ при этом $\begin{cases} x^8\ge 0 \\ y^8 \ge 0 \\ z^8\ge 0\end{cases}$

если x^4, y^4, z^4 будет больше 1, то и x^8, y^8, z^8 будут больше 1, чего быть не может.

~~$\sqrt{42}$~~

СМ. ЛИСТ 4

⑥ Прод.

~~$x^4<1$, $y^4<1$, $z^4<1$ } что~~

Проанализуем какие значения может принимать $x^4-2y^4+3z^4$ с учётом вышедоказанных ограничений:

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x^4 \le 1 \\ 0 \le y^4 \le 1 \\ 0 \le z^4 \le 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 0 \le x^4-2y^4+3z^4 \le 2 \quad (*)$$

Сравним $\sqrt{42}$ и 2:

$$\sqrt{42} \vee 2 \qquad \Leftrightarrow \sqrt{42} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{42} \notin (*) \Leftrightarrow$$
$$42 > 4$$

$\Leftrightarrow$ решений нет

~~P.S. Все неравенства были не строгие~~

Строго говоря не могло быть так, что $\begin{cases} x^4=0 \\ y^4=0 \\ z^4=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^4=1 \\ y^4=1 \\ z^4=1 \end{cases}$

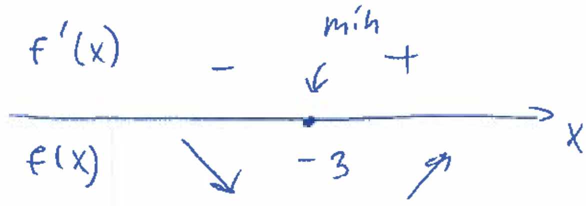
Однако, было доказано, что $\sqrt{42}$ не входит в расширенную область значений. Из этого следует, что $\sqrt{42}$ не будет попадать и в истинную область значений (2) с учётом 1.

$\boxed{\text{Ответ: решений нет.}}$

±

$x_0 = -2$

$f(x) = y = x^2 + 6x$

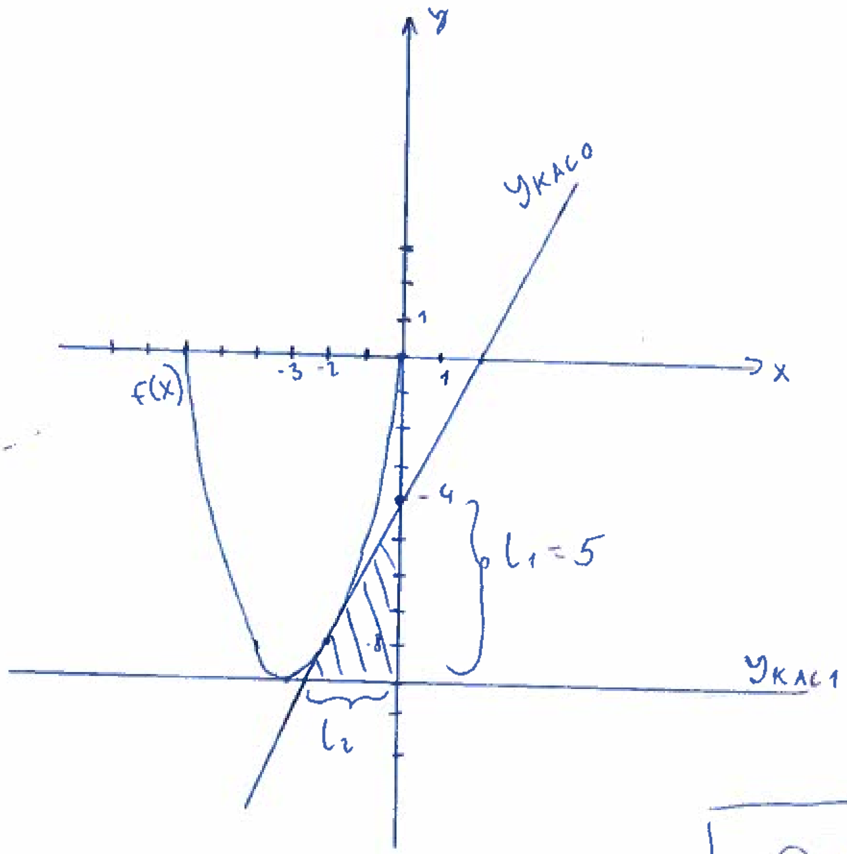


$f'(x) = 2x + 6, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$

$f(-3) = -9 \Leftrightarrow \underline{y_{кас1} = -9}$, т.к. касательная к экстремуму функции параллельна оси абсцисс, т.к. производная в данной точке равна 0.

$\underline{y_{кас0}} = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0) = (-4+6)(x+2) + 4 - 12 =$

$= \underline{2x - 4}$



$y_{кас0} = y_{кас1}$:

$2x - 4 = -9$

$2x = -5$

$x = -2{,}5$

$\Downarrow$

$l_2 = 2{,}5$

$S_\Delta = \dfrac{l_1 l_2}{2} = \dfrac{5 \cdot 2{,}5}{2} = 6{,}25$

$\boxed{\text{Ответ: } 6{,}25}$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

лист 6 Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 5 0 2

(4)

$$\begin{cases} x^2 \log_5(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x\ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^3 & (1) \\ 2xy - 8x = x^2(y-4)+1 & (2) \end{cases}$$

(*) $y>4$

(1):

$$2x^3 + x^2(\log_5(y-4)-2) - 3x\log_{125}(y-4) = 0$$

$$x(2x^2 + x(\log_5(y-4)-2) - 3\log_{125}(y-4)) = 0$$

$x=0$ $\quad 2x^2 + x(\log_5(y-4)-2) - \dfrac{3\log_5(y-4)}{3} = 0$

$$2x^2 + \cancel{x\log_5(y-4)} - 2 - \cancel{x\log_5(y-4)} = 0$$

$$2x^2 = 2$$

$$x = \pm 1$$

Теперь система равносильна:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x^2(y-4)+1 = 2xy - 8x \end{cases}$$

Отсюда находим y:

См. лист 7

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

лист 7

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 5 0 2

4 Прод.

$x=0: \quad 1=0 \Leftrightarrow \varnothing$

$x=1: \quad y-3=2y-8 \Leftrightarrow y=5 \quad \Big| \Leftrightarrow (1;5)$

$x=-1: \quad y-3=-2y+8 \Leftrightarrow 3y=11 \Leftrightarrow y=\frac{11}{3}$

$\frac{11}{3} \vee 4$

$\frac{11}{3} < \frac{12}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{11}{3} < 4 \Leftrightarrow$ не удовлетворяет $(*)$

Ответ: $(1;5)$.

$$x\left(2x^2+x(\log_5(y-4)-2)-\frac{3\log_5(y-4)}{3}\right)=0$$

$x=0$ $\quad 2x^2+x(\log_5(y-4)-2)-\log_5(y-4)=0$

$$2x^2+x\log_5(y-4)-2x-\log_5(y-4)=0$$

$$[\log_5(y-4)](x-1)=2x-2x^2$$

$$\log_5(y-4)=\frac{2x-2x^2}{x-1}$$

(4) Прод.

$$\log_5(y-4) = \frac{2x(1-x)}{x-1} = -2x$$

Система равносильна теперь:

$$\left.\begin{cases} x = 0 \\ \log_5(y-4) = -2x \\ x^2(y-4)+1 = 2xy-8x \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(y-4) = -2x \\ x^2(y-4)+1 = 2x(y-4) \end{cases}$$

$x = 0$: $1 = 0 \Leftrightarrow \varnothing$ ~~решений~~

$$y-4 = 5^{-2x}$$

Далее:

$$x^2(y-4) - 2x(y-4)+1 = 0$$

$$x^2 \cdot 5^{-2x} - 2x \cdot 5^{-2x} + 1 = 0$$

$$D = (2\cdot 5^{-2x})^2 - 4\cdot 5^{-2x} = 4\cdot 5^{-4x} - 4\cdot 5^{-2x} =$$

$$= 4\cdot 5^{-2x}(5^{-2x}-1)$$

$$x = \frac{2\cdot 5^{-2x} \pm \sqrt{4\cdot 5^{-2x}(5^{-2x}-1)}}{2\cdot 5^{-2x}}$$

(4) Прод.

$$x = \frac{2\cdot 5^{-2x} \pm 2\cdot 5^{-x}\sqrt{5^{-2x}-1}}{2\cdot 5^{-2x}} =$$

$$= 1 \pm 5^{x}\sqrt{5^{-2x}-1}$$

I

$x = 1+5^{x}\sqrt{5^{-2x}-1}$

$x-1 = 5^{x}\sqrt{5^{-2x}-1}, \quad x>1$

$x^2-2x+1 = 5^{2x}(5^{-2x}-1)$

$x^2-2x+\cancel{1} = \cancel{1}-5^{2x}$

$x^2-2x = -5^{2x}$

II

$x = 1-5^{x}\sqrt{5^{-2x}-1}$

$x-1 = -5^{x}\sqrt{5^{-2x}-1}, \quad x<$

~~$x^2-2x+1=$~~

$5^{x}\sqrt{5^{-2x}-1} = 1-x$

$5^{2x}(5^{-2x}-1) = 1-2x+x^2$

$1-5^{2x} = 1-2x+x^2$

$x^2-2x = -5^{2x}$

одинаков

~~$x^2-2x+5^{2x}=0$~~

~~$\left.\begin{array}{l} x^2-2x>0 \\ 5^{2x}>0 \Leftrightarrow 5^{2x}<0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \varnothing$~~

см. лист 10

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ЛИСТ 10

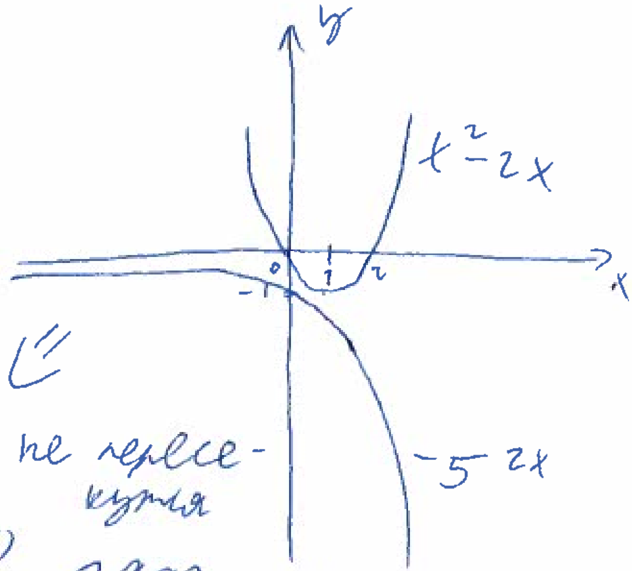
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 5 0 2

④ Т4 з

Смешанное уравнение, решить можно только графически, но ответ будет неточный.

$$\underbrace{(x-1)^2-1}_{x^2-2x}=-5^{2x}$$



$\varnothing$, не пересе-кутся

P.S. Скорее всего в задании опечатка, тогда смотреть зачёркнутое решение

здесь должен быть квадрат

возможная опечатка: $\dfrac{3x^2\ln(y-4)}{\ln 125}$

Тогда всё „красиво" и ответ $(1;5)$

Ответ: решений нет

$\pm$

2

$\arcsin\frac{4}{5}=x$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\arcsin t\le\frac{\pi}{2}$ $(*)$

$\arccos\frac{7}{25}=y$ $\quad 0\le\arccos t\le\pi$ $(\#)$

$\operatorname{arctg}\frac{4}{3}=z$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\operatorname{arctg} t\le\frac{\pi}{2}$ (γ)

$\sin x=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos x=+\frac{3}{5}$, см $(*)$

$\operatorname{tg} z=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \cos z=\sqrt{(\operatorname{tg}^2 z+1)^{-1}}=\sqrt{\left(\frac{16}{9}+1\right)^{-1}}=+\frac{3}{5}$,

$\sin z=+\frac{4}{5}$ см (γ) при этом $\begin{cases}\sin z=\frac{4}{5}\\ \cos z=\frac{3}{5}\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin z=-\frac{4}{5}\\ \cos z=-\frac{3}{5}\end{cases}$ не удовл.

Тогда, преобр. A:

$A=\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{7}{25}+\arccos\frac{3}{5}=2\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{7}{25}$

Найдём $\cos A$ и оттуда выразим a, как $\arccos$, так или иначе значение A будет выражено $\arccos$ некоторого числа, так что можно не преоб.

Ответ: $2\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{7}{25}$.