ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М 1 1 3 8

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 9.02.19

Площадка написания _____

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	8	12	20	20	16					81	восемьдесят один	

№1. $y = e^{-x}$ $\quad (y^{(2012)}) - ?$

Производная сложной функции $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

У функции $y = e^{-x}$: внутренняя $g(x) = -x$, внешняя $f(x) = e$

$y' = (e^{-x})' = (-x)' \cdot e^{-x} = -e^{-x}$

$f'(x) = (e^t)' = e^t$

Возьмём вторую производную $y'' = (-e^{-x})' = -(-x)' \cdot e^{-x} = e^{-x}$

Третья: $y''' = -e^{-x}$ Четвертая: $y'''' = e^{-x}$

То есть каждый четный период $(y^{(2n)}) = e^{-x}$, т.к. 2012 - четное

$\Rightarrow (y^{(2012)}) = e^{-x}$

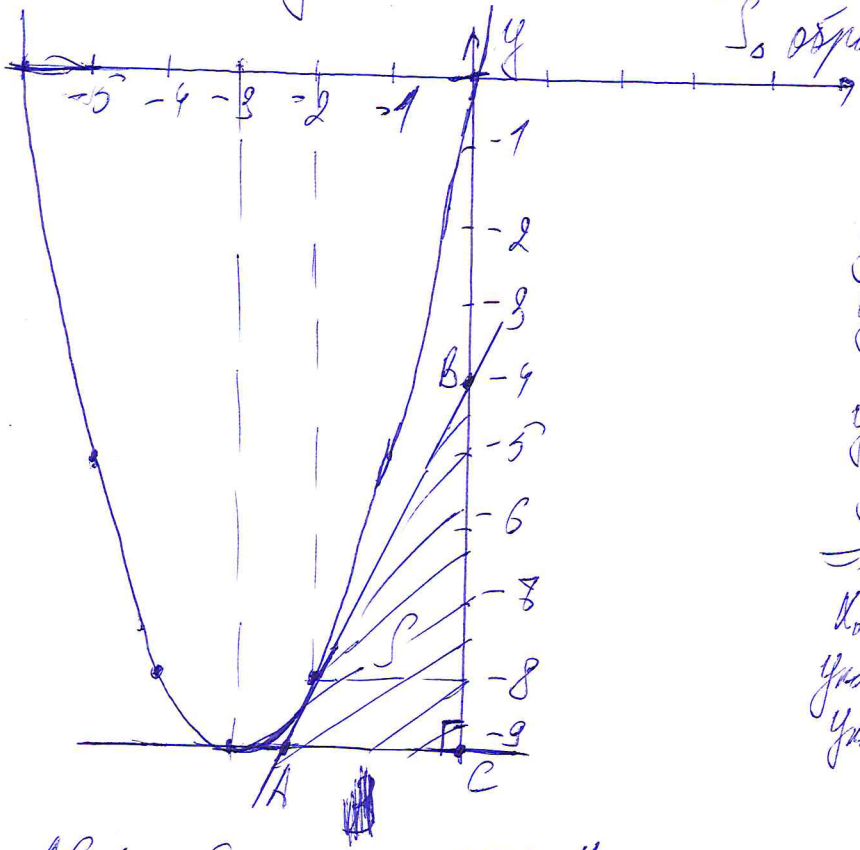
Ответ: $(y^{(2012)}) = e^{-x}$ +

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 3 | 8 |

№5. $y = 6x + x^2$



две кас. к x_{min} и $x_0 = -2$

S_Δ образ. кас. и Oy - ?

$y' = 6 + 2x \Rightarrow$ $x_{min} = -3$

y'	−	0	+
y	↘		↗

$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y_{кас} = 6x_0 + x_0^2 + (6 + 2x_0)(x - x_0)$

$x_0 = -3$

$y_{кас_1} = -18 + 9 + 0$

$y_{кас_1} = -9$, т. к. $y = const \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{кас_2} \perp Oy$

$x_0 = -2$

$y_{кас_2} = -12 + 4 + (6 - 4)(x + 2)$

$y_{кас_2} = 2x - 4$

AC: найдем т. пересеч. $y_{кас_1}$ и $y_{кас_2} \Rightarrow y_{кас_1} = y_{кас_2} \Rightarrow 2x_0 - 4 = -9 \Rightarrow x_0 = -2,5$

$AC = |-2,5| = 2,5$

BC: найдем т. пересеч. $y_{кас_2}$ и $Oy \Rightarrow B(-4; 0) \Rightarrow BC = 9 - 4 = 5$

$S_\Delta = AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25$ ($\angle ACB = 90°$, прямоугольный *)

Ответ: $S_\Delta = 6,25$

№4.

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 5^{-3}} - 2x^3 \quad (1) \\ 2xy - 8x = x^2(y-4) + 1 \quad (2) \end{cases}$$

Рассм. (1) ур-е: $x^2 \cdot \log_{5^{-3}}(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 5^{-3}} - 2x^3$

$y-4 = t \quad (y>4,\ t>0)$

$x^2 \cdot \log_{5^{-3}} t - 2x^2 - \dfrac{3x \cdot \ln t}{3\ln 5} + 2x^3 = 0$

$x(\log_{5^{-3}} t - 2x - x\ln t + 2x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\log_{5^{-3}} t \cdot (1-x) - 2x(1-x) = 0$

$(1-x)\cdot(\log_{5^{-3}} t - 2x) = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

$\log_{5^{-3}} t = 2x \quad (3)$

Рассм. (2) ур-е

$2x(y-4) = x^2(y-4) + 1$

$(y-4)(2x-x^2) = 1 \Rightarrow t = y-4 = \dfrac{1}{2x-x^2}$ (в данном случае $x \neq 0$, $x \neq 2$)

Подставим t в (3) ур-е

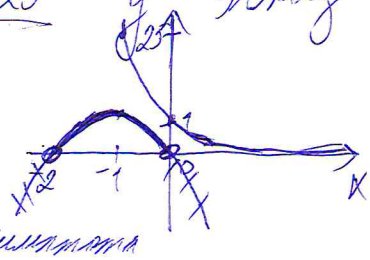
$\log_5\left(\dfrac{1}{2x-x^2}\right) = 2x \Rightarrow \dfrac{1}{2x-x^2} = 5^{-2x} \Rightarrow 2x - x^2 = 5^{-2x} = 25^{-x} \quad (4)$

Найдём ограничения для $\dfrac{1}{2x-x^2} > 0 \Rightarrow x \in (0;2)$

Т. к. $f(x) = 2x - x^2$ возр. до -1, а затем убывает и $x_{max} = -1$, $f(x_{max}) = 1$,

а $g(x) = 25^{-x}$ убывает и $g(x) = 1$ при 0, а прямая $y = 0$ - асимптота

Эскиз



Соот-но ур-е (4) не имеет решений

Подставим $x_2 = 1$ во (2) ур-е $2y - 2 = y - 4 + 1 \Rightarrow y_2 = 5$ (подходит всем условиям)

Подставим $x_1 = 0$ во (2) ур-е $0 - 0 = 0 + 1$ (неверно) $\Rightarrow x_1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 5 \end{cases}$

Ответ: (1; 5)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М 1 1 3 8

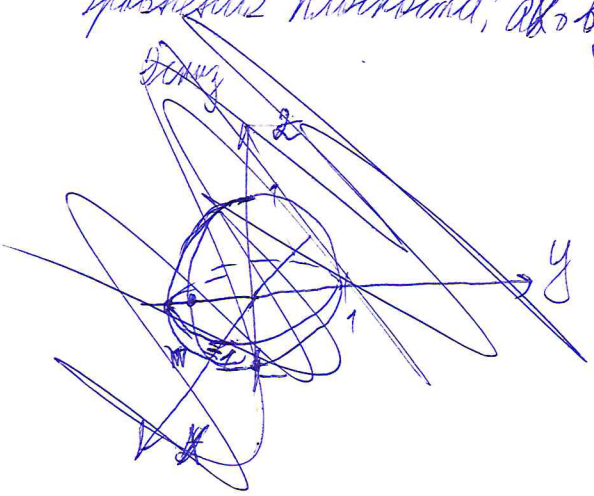
№6. $\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1 \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42} \end{cases}$ Заменим $\begin{matrix} x^4 = \omega \\ y^4 = t \\ z^4 = \ell \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 + t^2 + \ell^2 = 1 \\ \omega - 2t + 3\ell = \sqrt{42} \end{cases}$

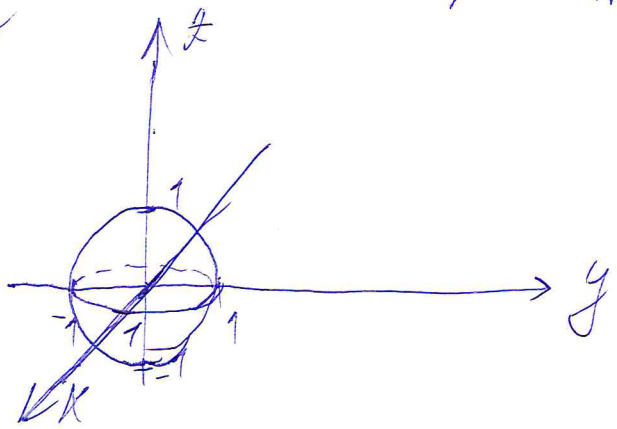
Т.к. $\omega^2 + t^2 + \ell^2 = 1 \Rightarrow \omega, t, \ell \in [0;1]$ ($\omega^2 \geq 0$, $t^2 \geq 0$, $\ell^2 \geq 0$)

Данное уравнение задает сферу с ц. в $(0;0;0)$ и $R=1$

$\omega - 2t + 3\ell - \sqrt{42} = 0$

Уравнение плоскости: $ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \omega - 2t + 3\ell - \sqrt{42} = 0$ – уравнение плоскости ограничения





Значит решением системы будут точки пересечения (касания) сферы и ограниченной плоскости

Плоскость подъема на $\sqrt{42} \Rightarrow$ это, чтобы пересечь или коснуться сферы нужен больший угол наклона, но $t, \omega, \ell \in [0;1]$ $\Rightarrow$ в лучшем случае (пл-ть $\perp Oxy$) $\sqrt{42} - 1$ не пересечет сферу

Ответ: нет решений

№3. K - количество деталей $95{,}2\% < K < 98{,}2\%$ K_{min} - ?

Рассмотрим две дроби $\frac{95{,}2}{100}$ и $\frac{98{,}2}{100}$, получается мы должны привести две эти дроби к виду $\frac{n}{n+1}$ и найти дробь $\frac{K_{min}-1}{K_{min}}$

$\frac{952}{1000} \approx \frac{19}{20}$

$\frac{982}{1000} \approx \frac{49}{50}$

$190 \mid 20$
$-180 \quad 0{,}95$
100
-100
0

$0{,}95(n+1) = n \Rightarrow 0{,}95n + 0{,}95 = n \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}05n = 0{,}95 \Rightarrow n = \frac{95}{5} = 19$

$0{,}98(n+1) = n \Rightarrow 0{,}02n = 0{,}98 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{49}{50}$.

$\frac{19}{20} < \frac{K_{min}-1}{K_{min}} < \frac{49}{50}$, то есть $K_{min} \in (20; 50)$, наименьшее K_{min} в этих границах $K_{min} = 21$

Ответ: Наименьшее возможное количество деталей в партии = 21

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 3 | 8 |

№2. А-9 $A = \arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{7}{25} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

Рассмотрим $\arcsin\frac{4}{5}$ и $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

~~$\sin(\arcsin\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$~~ ~~$\sin(\operatorname{arctg}\frac{4}{3})$~~ $\operatorname{tg}(\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}_{\text{обз. }\alpha}) = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{9}{16} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow$

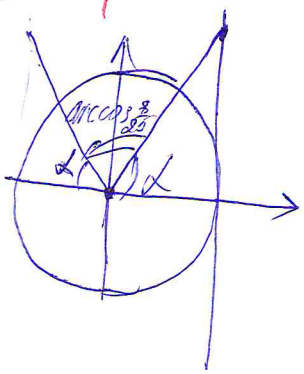
$\Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{4}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

$A = 2\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{7}{25}$ $\quad \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos 2\alpha = \underbrace{1 - 2\sin^2\alpha}_{1 - 2\cdot\frac{16}{25}} = \underbrace{2\cdot\frac{9}{25} - 1}_{} = -\frac{7}{25}$

$\cos 2\alpha = \cos(2\arcsin\frac{4}{5}) \Rightarrow \arccos(\arccos\frac{7}{25}) = \frac{7}{25} \Rightarrow$?

$\Rightarrow \arccos\frac{7}{25} = \pi - 2\alpha \Rightarrow \pi = \arccos\frac{7}{25} + 2\alpha$



Ответ: π