



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

$(ab)c = a(bc)$ $E=mc^2$ $\frac{1}{x} = x^{-1}$

ШИФР

М 1 1 2 5

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания 204 аудитория ТПУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	0	20	20	0					55	пятьдесят пять	

№1. $y = x \cdot e^x$; $(y^{(2019)}) - ?$

$$y' = (x \cdot e^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x$$

$$y'' = (x \cdot e^x)'' = (e^x + x \cdot e^x)' = e^x + e^x + x \cdot e^x = 2e^x + x \cdot e^x$$

$$y''' = (x \cdot e^x)''' = (2e^x + x \cdot e^x)' = 2e^x + e^x + x \cdot e^x = 3e^x + x \cdot e^x$$

Заметим, что порядок производной совпадает с коэффициентом перед стоящим e^x в правой части выражения. +

Значит $y^{(2019)} = 2019e^x + x \cdot e^x$

Ответ: $y^{(2019)} = 2019 \cdot e^x + x \cdot e^x$

№2. $A = \arcsin \frac{24}{25} + \arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin \left(\arcsin \frac{24}{25} + \arccos \frac{3}{5} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) = \\ &= \left(\sin \left(\arcsin \frac{24}{25} \right) \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) + \sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right) \cos \left(\arcsin \frac{24}{25} \right) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) + \left(\cos \left(\arcsin \frac{24}{25} \right) \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) - \sin \left(\arcsin \frac{24}{25} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin \left(\arccos \frac{3}{5} \right) \right) \cdot \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin(\arccos x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2} \\ \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{cases}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

М 1 1 2 5

$$\{\sin(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \cdot \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\}$$

$$= \left(\frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} + \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \cdot \sqrt{1 - \frac{576}{625}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{16/9 + 1}} +$$

$$+ \left(\sqrt{1 - \frac{576}{625}} \cdot \frac{3}{5} - \frac{24}{25} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \right) \cdot \frac{4/3}{\sqrt{16/9 + 1}} =$$

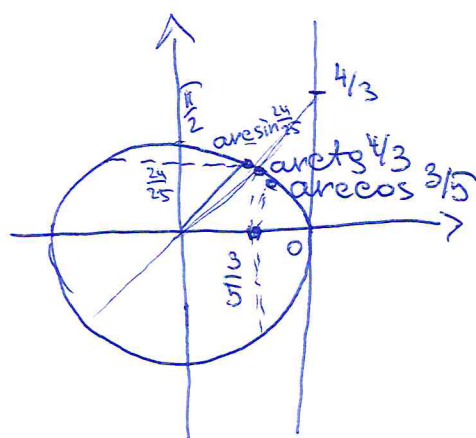
$$= \left(\frac{24 \cdot 3}{25 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 7}{25 \cdot 5} \right) \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{7 \cdot 3}{25 \cdot 5} - \frac{24 \cdot 4}{25 \cdot 5} \right) \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= \frac{100 \cdot 3}{25 \cdot 25} + \frac{(21 - 96)4}{25 \cdot 25} = \frac{12}{25} + \frac{(-75) \cdot 4}{25 \cdot 25} = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} =$$

$\sin A = 0$ ~~неверно~~; $A = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, однако:

Рассмотрим все выражения и отметим углы на единичной окружности:

$$0 < \operatorname{arcsin} \frac{24}{25} < \frac{\pi}{2} ; 0 < \operatorname{arccos} \frac{3}{5} < \frac{\pi}{2} ; 0 < \operatorname{arctg} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{2}$$



Значит, $A = \pi$ (т.к. $A < \frac{3\pi}{2}$ и $A \geq 0$)

Ответ: $A = \pi$

ШИФР

М 1 1 2 5

№ 5.

$f(x) = y = 3x - x^2$; $у_{кас1}$ - кас. к гр. ф-ции $f(x)$ в точке максимума

$$f'(x) = 3 - 2x$$

$у_{кас2}$ - кас. к гр. ф-ции $f(x)$ в точке с абсц. $x_0 = 2$

Найти: S_{Δ} , образ. касательными и осью oy .

Рассмотрим квадратичную ф-цию $f(x) = 3x - x^2$ - её графиком является парабола с ветвями вниз. Значит, абсцисса точки максимума x_1 равна:

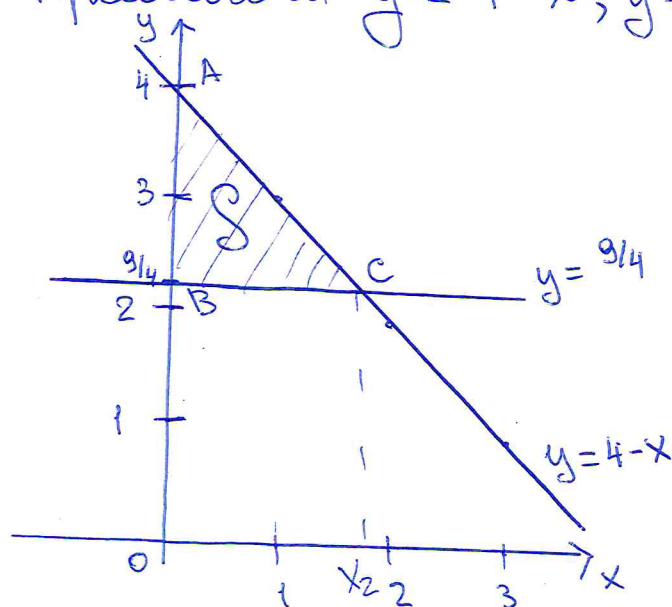
$$x_1 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}; y(x_1) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

Именно прямая $y = \frac{9}{4}$ будет являться касательной к графику ф-ции $f(x)$ в точке максимума.

Найдём уравнение касательной к гр. ф-ции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} у_{кас2} &= f(2) + f'(2)(x-2) = (3 \cdot 2 - 4) + (3 - 4)(x-2) = \\ &= 2 + (-1)(x-2) = 4 - x \end{aligned}$$

Значит, нам нужно найти S_{Δ} -ка, образованного прямой $y = 4 - x$; $y = \frac{9}{4}$ и осью oy (обознач. его ΔABC)



Определим $S_{\Delta ABC}$:

~~Неверно!~~

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$, т.к. он является прямоугольником.
(прямая $y = \frac{9}{4}$ $\perp$ -на оси ординат)

Определим x_2 - абсциссу точки пересечения

$$\begin{aligned} y &= \frac{9}{4} \\ y &= 4 - x \\ 4 - x_2 &= \frac{9}{4} \Leftrightarrow x_2 = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

ШИФР

М 1 1 2 5

Значит, исконая площадь будет равна:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (4 - \frac{9}{4}) \cdot (\frac{7}{4} - 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{32}$$

Ответ: $S_{\Delta} = \frac{49}{32}$

№4.
$$\begin{cases} x^2 \log_3(y+7) + \frac{1}{2}x^3 = 6x \frac{\ln(y+7)}{\ln 27} + x^2(1) & \text{D3: } y > -7 \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2(y+7) + 1 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим по-отдельности уравнения системы и совершим необходимые преобразования:

(1)
$$\begin{aligned} x^2 \log_3(y+7) - 6x \log_3(y+7) &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 \\ x^2 \log_3(y+7) - 2x \log_3(y+7) &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 \\ x \log_3(y+7) \cdot (x-2) &= \frac{1}{2}x^2(2-x) \\ (x-2)(x \log_3(y+7) + \frac{1}{2}x^2) &= 0 \\ x(x-2)(\log_3(y+7) + 0,5x) &= 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} 4x(y+7) - 3(y+7) &= x^2(y+7) + 1 \\ (y+7)(4x-3-x^2) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(x-2)(\log_3(y+7) + 0,5x) = 0 \\ (y+7)(4x-3-x^2) = 1 \end{cases}$$

Видим, что можно преобразовать на 3 системы, в которых

Рассмотрим 3 случая:



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

M 1 1 2 5

$$a) \begin{cases} x=0 \\ (y+7)(4x-3-x^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+7=-\frac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x=-7\frac{1}{3} \notin \mathbb{Q}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-7\frac{1}{3} \end{cases}$ не является решением системы

$$b) \begin{cases} x=2 \\ (y+7)(4x-3-x^2)=1 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ (y+7)(8-3-4)=1 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-6 \in \mathbb{Q}_3 \end{cases}$$

Значит $(2; -6)$ - решение системы

$$b) \begin{cases} \log_3(y+7) + \frac{1}{2}x = 0 \\ (y+7)(4x-3-x^2)=1 \end{cases} \begin{cases} \log_3(y+7) = -\frac{1}{2}x \\ (y+7)(4x-3-x^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^{-0,5x} - 7 \\ (3^{-0,5x} - 7 + 7)(4x - 3 - x^2) = 1 \end{cases}$$

$$3^{-0,5x} (4x - 3 - x^2) = 1$$

$$3^{-0,5x} > 0$$

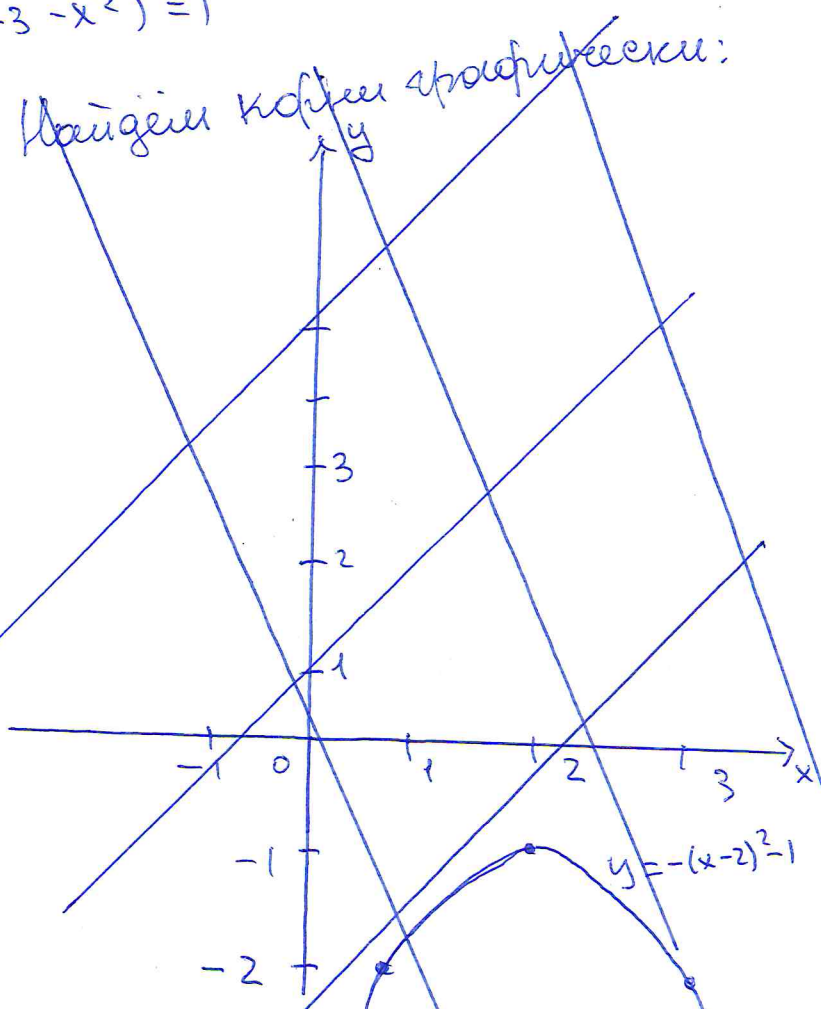
$$4x - 3 - x^2 = 3^{0,5x}$$

Найдем корни графически:

$$y = 3^{0,5x}$$

$y = -(x-2)^2 + 1$ - парабола
с ветвями вниз

вершиной в точке $(2; 1)$





$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

М 1 1 2 5

Найдем корни графически:

$y = 4x - 3 - x^2 = -(x-2)^2 + 1$ — парабола с ветвями вниз и
вершиной в точке $(2; 1)$

$y = 3^{0,5x}$ — монотонно-возрастающая показательная
функция

$$y = 3^{0,5x}$$

x	1	2	0
y	$\sqrt{3}$	3	1

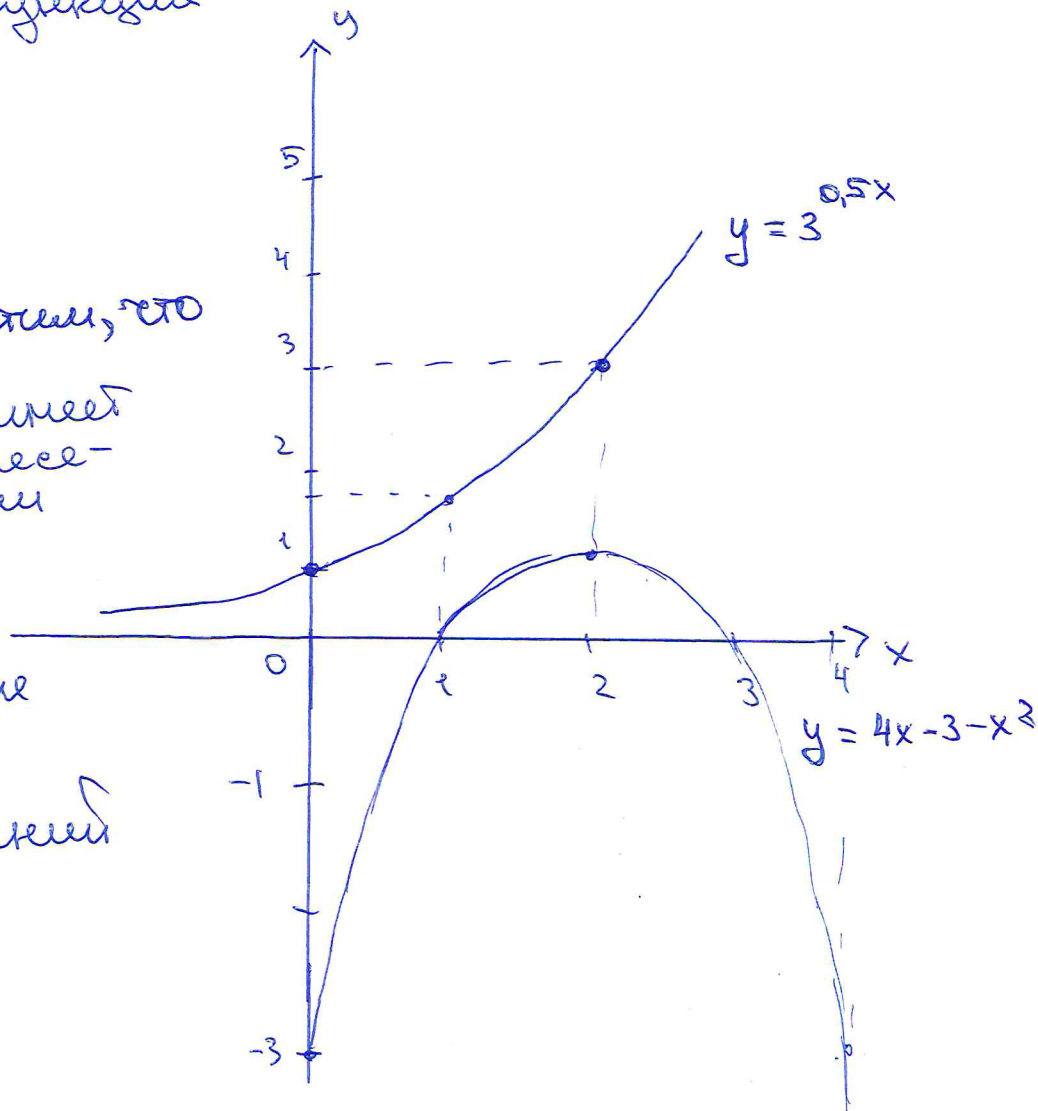
$\sqrt{3} \approx 1,7$; Заметим, что

р.ф-ция $y = 3^{0,5x}$ не имеет
общих точек пересече-
ния с кр.ф-цией
 $y = 4x - 3 - x^2$

Значит, уравнение

$$4x - 3 - x^2 = 3^{0,5x}$$

не имеет решений



Ответ: ~~нет корней~~ $x = 2; y = -6$