ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М 1 1 1 5

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 9.02.2019

Площадка написания 204 ауд. ТПУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	0	~~0~~ 5	20	20	15					60	~~пятьдесят пять~~ шестьдесят	

① $(xe^x)' = e^x + xe^x$

$(e^x + xe^x)' = e^x + e^x + x^{e^x} = 2e^x + x^{e^x}$?

Докажем, что производная k-го порядка от xe^x равна $ke^x + e^x$, $k \in \mathbb{N}$

1) Для $k=1$ это выполняется.

2) Пусть условие выполняется ~~тся~~ся для некоего k, т.е. производная k-го порядка равна ke^x+e^x. Покажем, чему будет равна пр-я $k+1$ порядка

$(ke^x + xe^x)' = ke^x + e^x + xe^x = (k+1)e^x + e^x$ – условие выполнилось $\Rightarrow$ при $k = 2019$ производная будет выглядеть так: $2019x + e^x$

Ответ: $2019x + e^x$

② $A = \arcsin\frac{24}{25} + \arccos\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

$\alpha \overset{\text{об}}{=} \arccos\frac{3}{5}$, $\alpha \in$ I чв, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{25}{9} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{16}{9} \overset{\alpha \in \text{I}}{\Rightarrow} \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \Rightarrow A = \arcsin\frac{24}{25} + 2\alpha$

$\sin\alpha \overset{\alpha \in \text{I ч.}}{=} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin\frac{24}{25} \Rightarrow A = 2\arcsin\frac{24}{25}$

Ответ: $A = 2\arcsin\frac{24}{25}$

④ $\begin{cases} x^2\log_3(y+7) + 0{,}5x^3 = \frac{6x\ln(y+7)}{\ln 27} + x^3 \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2(y+7) + 1 \end{cases}$

ОДЗ: $y > -7$.

ШИФР М 1 1 1 5

1) $x=0$.

$$\begin{cases}0=0\\ -3y=22\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-\frac{22}{3}\notin \text{ОДЗ}.\end{cases}$$

2) $x\neq 0$

$$\begin{cases}x\log_3(y+7)+0{,}5x^2=6\log_{27}(y+7)+x\\ y(4x-3)+7(4x-3)=x^2(y+7)+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(\log_3(y+7)+0{,}5x)=2(\log_3(x+7)+0{,}5x)\\ (y+7)(4x-3-x^2)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)(\log_3(y+7)+0{,}5x)=0\\ (y+7)(4x-3-x^2)=1\end{cases}$$

2.1) $x=2$

$$\begin{cases}0=0\\ (y+7)(8-3-4)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-6\in \text{ОДЗ}\end{cases}$$

2.2) $x\neq 2$, $x\neq 1$ и $x\neq 3$ (при $x=1$ или $x=3$ система не имеет смысла, т. к. $4x-3-x^2=0$

$$\begin{cases}\log_3(y+7)=-0{,}5x \ (1)\\ y+7=(-x^2+4x-3)^{-1} \Rightarrow x\in(1;3), \text{ т. к. } y+7>0.\end{cases}$$

$-x^2+4x-3>0 \Leftrightarrow (x-3)(x-3)<0$ $\Rightarrow x\in(1;3)$?

(1) $\log_3(1-(x-2)^2)=0{,}5x$

При $x\in(1;3)$, $0{,}5x>0$, а $\log_3(1-(x-2)^2)\leq 0 \Rightarrow$ решения система иметь не будет.

Ответ: $(2;-6)$

5) Чертёж смотри на след. странице!

Найдём ур-ие прямой AC

$f(x)=3x-x^2$, $f'(x)=3-2x$, $x_0=2$

AC: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=2-(x-2)=4-x$.

Уравнение прямой BC: $y=2{,}25$

т. $A(0;4-0=4)$, т. $B(0;2{,}25)$; т. C – точка пересечения прямых AB и BC

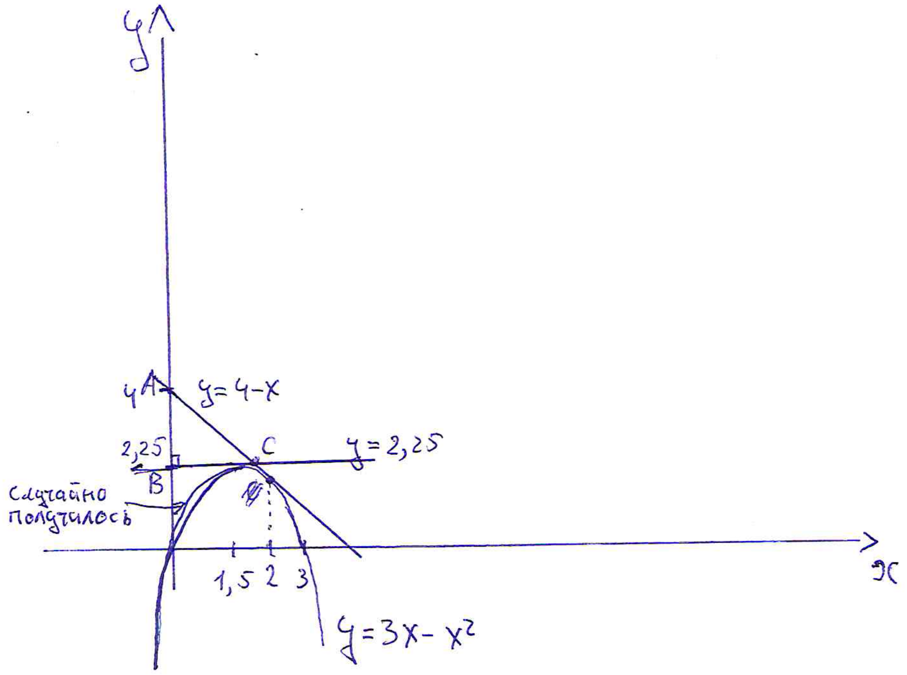
$4-x=2{,}25 \Rightarrow x=1{,}75 \Rightarrow \exists$ т. $C(1{,}75;2{,}25)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 1 | 5 |



$AB=4-2{,}25=1{,}75$.

$BC=1{,}75-0=1{,}75$.

$\angle ABC=90^0$, т.к. $BC \parallel OX$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{7}{4}=\frac{49}{32}$

1 Ответ: $\frac{49}{32}$

6 $\begin{cases} x^4+y^4+z^4=1 \ (2). \\ 2x^2+3y^2+4z^2=\sqrt{30} \ (1) \end{cases}$

(1) $(2x^2+3y^2+4z^2)^2=(\sqrt{30})^2$

$4x^4+9y^4+16z^4+12x^2y^2+16x^2z^2+24y^2z^2=30(x^4+y^4+z^4)$

$12x^2y^2+16x^2z^2+24y^2z^2=26x^4+21y^4+14z^4$.

Левая ~~Правая~~ часть кратна 4 => $x, y, z \vdots 2$ (*)

(2) $x^4+y^4+z^4=1$

$1\equiv 1 \mod 2$

$x^4+y^4+z^4\equiv 0 \mod 2$ (т.к. (*)) } => система не имеет решения

Ответ: нет решения

3 Рассмотрим правильную дробь $\frac{a}{b}$. Если $\frac{ax}{b}$ - целое (при условии что $x \in \mathbb{N}$), то $x=kb, k\in \mathbb{N}$ => наимень-
ший $x=b$ (*)

~~Ко~~ Пусть N - кол-во деталей в партии, а n - кол-во деталей, соот-их станд
Там. $N, n \in \mathbb{N}$

Рассмотрим числа от $\frac{973}{1000}$ до $\frac{123}{125}=\frac{984}{1000}$, представленные в виде правилы
дробей. Докажем, что наименьший знаменатель из всех этих дробей раве
40.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 1 | 5 |

1) $\frac{975}{1000}=\frac{39}{40}$

2) Между числами 973 и 984 нет числа, кратного одному из ~~чи~~ следующих чисел: 500; 250; 200; 125; 100; 50; 40 => среди чисел $\frac{973}{1000};\ldots;\frac{984}{100}$ не будет дробей со знаменателями 2; 4; 5; 8; 10; 20; 25. Все остальные возможные знаменатели ≥ 40

Заметим, что если ~~увеличить~~ изменить числитель и знаменатель дробей $\frac{973}{1000}$ и $\frac{984}{1000}$ в k раз, то выш
казанное утверждение останется верным, т.е. если м-ду числами a и c не
числа, кратного d => ~~в дроб~~ между числами $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ (они являются правильными дро
бями) нет прав. дроби со знаменателем b/d ($b \vdots d$), ~~то среди~~ значит, между прав. дробями
$\frac{ak}{bk}$ и $\frac{ck}{bk}$ не будет дроби, имеющей знаменатель $\frac{bk}{dk}=\frac{b}{d}$

Т.к. наим. знаменатель равен 40, то наим. $N=40$

Ответ: 40