ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 1 | 7 |

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания 204 ТПУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	8	15	16	20	25					89	восемьдесят девять	

① Найти производную 2018-го порядка от функции $y=e^{-x}$.

По правилу производной сложной функции.

1-й $y'=(-x)'\cdot e^{-x}=-e^{-x}$

2-й $y''=-(-x)'\cdot e^{-x}=e^{-x}$

3-й $y'''=-e^{-x}$

...

2018-й e^{-x}

Заметим, что производные порядка $2n$ $(n\in\mathbb{N})$ равны e^{-x}

Так как $2018 \vdots 2$ производная 2018-го порядка равна e^{-x}.

Ответ: e^{-x}. +

② Вычислить значение выражения A

$$A=\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{7}{25}+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Заметим, что $\arcsin\frac{4}{5}=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, так как: если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, то $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{1-\sin^2\alpha}$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М1117

$$tg^2\alpha = \frac{1}{1-\sin^2\alpha} - 1 = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{16/25}{1-16/25} =$$

$$= \frac{16}{9} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{4}{3} \\ tg\,\alpha \neq -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$ (т.к. $\alpha < \arcsin\frac{4}{5} <$

тогда:

$$A = 2\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arccos\left(\frac{7}{25}\right)$$

докажем, что $2\arcsin\frac{4}{5} = -\arccos\frac{7}{25}$:

$$\cos\left(2\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 1 - 2\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right) =$$

$$= 1 - 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{2\cdot 16}{25} = \frac{25-32}{25} = \frac{-7}{25}.$$

$$\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right) = -\cos\left(\arccos\frac{7}{25}\right)$$

тогда ~~эти угла~~ т.к. $y = \cos x$ четная функция:

$$\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos\left(-\arccos\frac{7}{25}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\arcsin\frac{4}{5} = -\arccos\frac{7}{25}.$$

тогда:

$$A = \arccos\frac{7}{25} - \arccos\frac{7}{25} = 0$$

Ответ: $\cancel{A = 0}$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 1 | 7 |

(3) Процентное содержание деталей, соответствующих стандартом $\in [95,2\%; 98,2\%]$
найти
наименьшее возможное
количество деталей в этой партии.

пусть кол-во всех деталей y, а кол-во деталей, не соответствующих стандарту x, тогда процентное содержание деталей, соответствующих стандартом:

$\frac{y-x}{y} \cdot 100\%$ найдем наименьшее значение y наим:

по условию:

$95,2\% \leq \frac{y-x}{y} \cdot 100\% \leq 98,2\%$

$0,952 \leq \frac{y-x}{y} \leq 0,982 \quad | \times 1000y$

$952y \leq 1000y - 1000x \leq 982y$

$1000x + 952y \leq 1000y \leq 1000x + 982y$

из двойного нер-ва получим систему:

$\begin{cases} 48y \geqslant 1000x \\ 18y \leq 1000x \end{cases}$

$\begin{cases} y \geqslant \frac{250}{12}x \\ y \leq \frac{500}{9}x \end{cases}$ $\cancel{55\frac{5}{9}}$ $\cancel{20\frac{5}{6}}$

$\begin{cases} y \geqslant 20\frac{5}{6} \cdot x \\ y \leq 55\frac{5}{9} \cdot x \end{cases}$

из системы: наименьшее значение y наим достигается при наименьшем значении x.

так как x - кол-во деталей, не соответ. стандарту: $x \in [1; y]$, причем $x \in \mathbb{N}$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М 1 1 1 7

$\Rightarrow$ наименьшее значение $x=1$

тогда $y_{наим}$ удовлетворяет условию:

$$\begin{cases} y_{наим} \geq 20\frac{5}{6} \\ y_{наим} \leq 55\frac{5}{9} \end{cases}$$

$y_{наим}$ – наим значение y, тогда

$y_{наим} = 21$.

$$\begin{cases} 21 > 20\frac{5}{6} \\ 21 < 55\frac{5}{9} \end{cases}$$

Ответ: наименьшее возможное количество деталей в этой партии 21.

(4) $\boxed{x-?;\ y-?}$

$$\begin{cases} x^2\cdot\log_5(y-4)-2x^2 = 3x\,\frac{\ln(y-4)}{\ln 125}-2x^3 \\ 2xy-8x = x^2(y-4)+1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cdot\log_5(y-4)-2x^2 = 3x\cdot\log_{125}(y-4)-2x^3 \\ 2x(y-4) = x^2(y-4)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\log_5(y-4)-2x^2 = x\log_5(y-4)-2x^3 \\ 2x(y-4) = x^2(y-4)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_5(y-4))(x^2-x) = 2x^2-2x^3. \\ (x^2-2x)(y-4) = -1 \end{cases}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М111 7

$$\begin{cases} (\log_5(y-4))\cdot(x-1)x = 2x^2(1-x) \\ x(x-2)(y-4) = -1 \end{cases}$$

проверим, ~~[illegible]~~ есть ли решения при: $x=0$, $x=1$

$x=0$	$x=1$
$\begin{cases} 0=0 \\ 0=1 \end{cases}$ $x\in\varnothing$ нет реш. $y\in\varnothing$	$\begin{cases} 0=0 \\ 1\cdot(-1)(y-4)=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ – решение системы

попробуем найти решение системы для $x\neq1$ и $x\neq0$:

$$\begin{cases} \log_5(y-4)=-2x \\ x(x-2)(y-4)=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y-4=(-2x)^5 \\ y-4>0 \\ x(x-2)(y-4)=-1 \end{cases}$$

$$5^{-2x}$$

$$\begin{cases} (y-4)=(-2x)^5>0 \\ x(x-2)\cdot(-2x)^5=-1=(-2)^5\cdot x^6(x-2) \end{cases}$$

$$(-2x)^5>0 \Longleftrightarrow x<0$$

$$\begin{cases} y-4=(-2x)^5 \\ x<0 \quad (2) \\ x^7-2x^6=\frac{1}{2^5} \quad (3) \end{cases}$$

если условие (2) выполняется, то в левой части условия (3) отрицательное число(*), а в правой части положительное. такое условие не может выполняться.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | М | 1 | 1 | 1 | 7 |

* при $x<0$, $x^7<0$, $a-2x^6<0$, сумма 2-х отриц. чисел – отрицательное число.

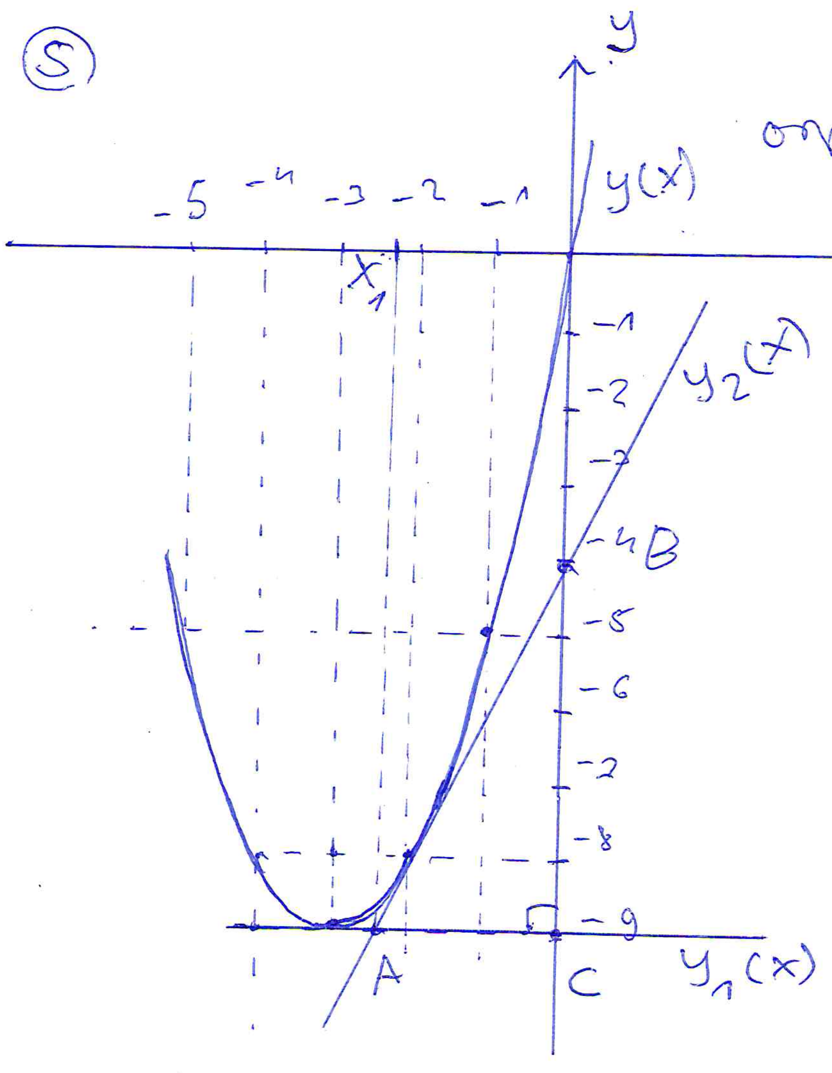
тогда при $x \neq 0$ и $x \neq 1$ нет решений системы.

Ответ: единственное решение системы

$$\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$$

(5)

График $y=6x+x^2$ кас. в т. $x_0=-2$. кас в т мин, определить $S_\triangle$, образов касат. и осью ординат.



1) найдем коор. т. минимума фун $y(x)$.

$x_{min} = -\frac{6}{2} = -3$

$y_{min} = -18+9=-9$.

2) построим граф. функции $y(x)$ (парабола с ветвями вверх, коэф. при $x^2=1$ и прохо[д]. ч/з $x_{min}=-3$ $y_{min}=-9$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М 1 1 1 7

3) проведем прямую y_1 – касат., проход. через точку минимума.
так как касат проходит ч/з точку минимума, а $y_{min} = -9$, то

$y_1 = y_{min} = -9$ (произв. ⇒ коэф. кас. в т. мин. $= 0$).

4) проведем касательную в т. с абсциссой $x_0 = -2$.
найдем её ур-е:

$y_2 = y'(x_0)\,x + b$.

$y'(x_0) = 6 + 2\cdot(-2) = 2$.

кас проходит ч/з точку с ~~абсциссой~~ координатами $(x_0; y(x_0)) = (-2; -8)$ из этого найдем зн. b:

$-8 = -2\cdot 2 + b \Rightarrow b = -4$. $y_2(x) = 2x - 4$.

5) рассмотрим $\triangle ABC$:
т.к. $AC \parallel OX$, $AC \perp$-на $OY \Rightarrow \angle ACB = 90°$
(см. п. 3)

тогда $\triangle ABC$ прямоуг и его площадь

$S_\triangle = AC\cdot CB\cdot\frac{1}{2}$

из граф.:

$BC = |y_1(0) - y_2(0)| = 5$

из граф.:

$AC = |x_1|$, где x_1 – абсцисса $y_2(x)$ в т-ке $(x_1; -9)$

$\Rightarrow -9 = 2x_1 - 4$.

$2x_1 = -5 \Rightarrow x_1 = -2{,}5 \Rightarrow AC = 2{,}5$.

тогда $S_\Delta = 2,5\cdot 5\cdot \frac{1}{2} = (2,5)^2 = 6,25$.

Ответ: $S_\Delta = 6,25$ – площадь треугольник образованного кас. и осью ординат.

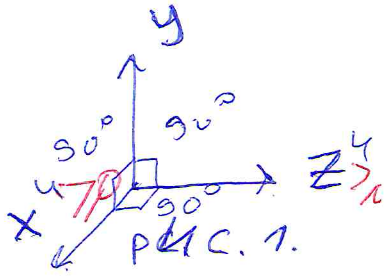


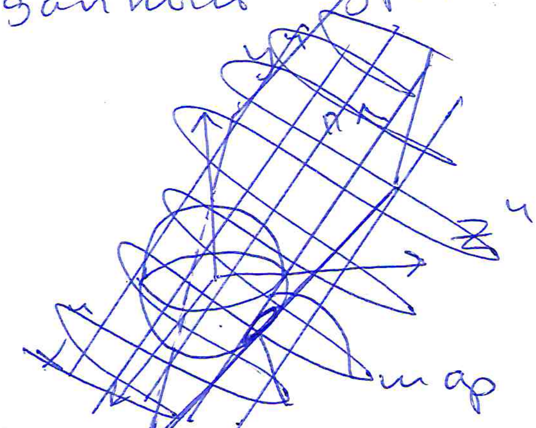
рис. 1.

⑥ $$\begin{cases} x^8+y^8+z^8=1 & (1) \\ x^4-2y^4+3z^4=\sqrt{42} & (2) \end{cases}$$

в системе координат ~~[illegible]~~ ур-е (1) является уравнением шара, а ур-е (2) уравнением плоскости.

$\frac{1}{4}$ шара.

тогда система уравнений будет иметь решения если плоскость, заданная уравнением (2) пересечет шар, заданный уравнением (1). (рис. 2).



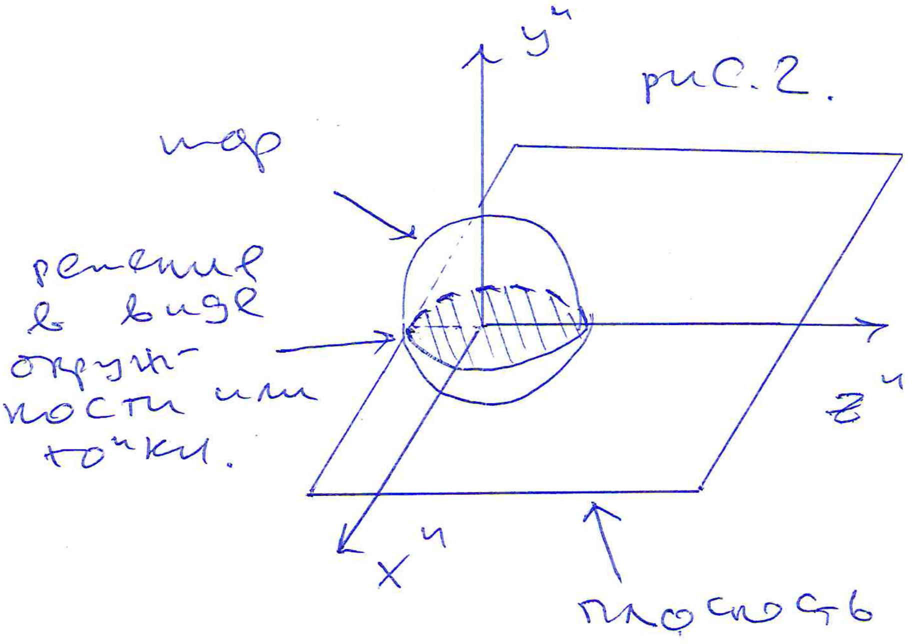
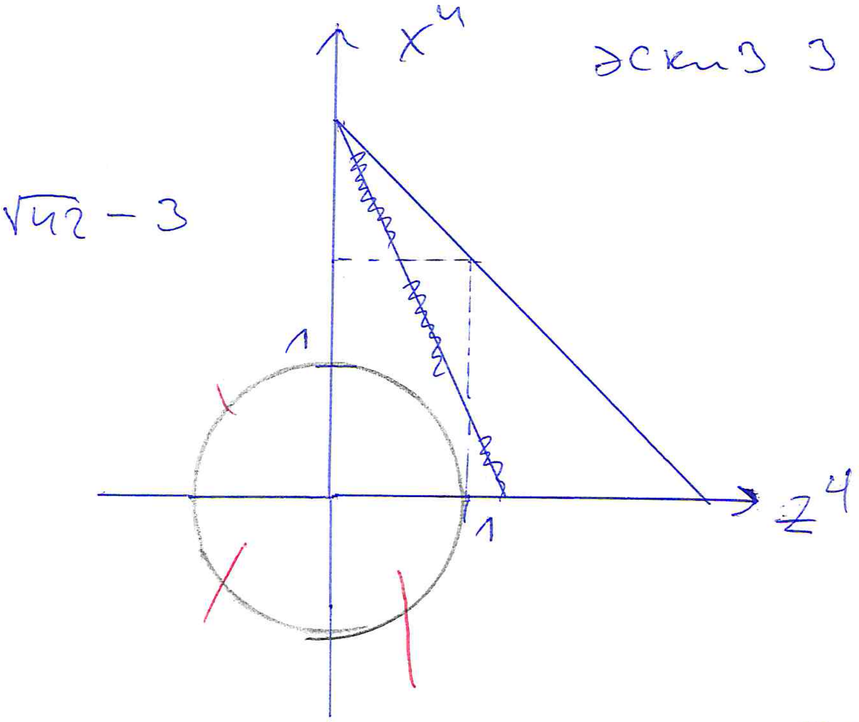


рис. 2.

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР М 1 1 1 7

эскиз 3



$y^4 = 0$

$x^4 = \sqrt{42} - 3z^4$

$6 < \sqrt{42} < 7$

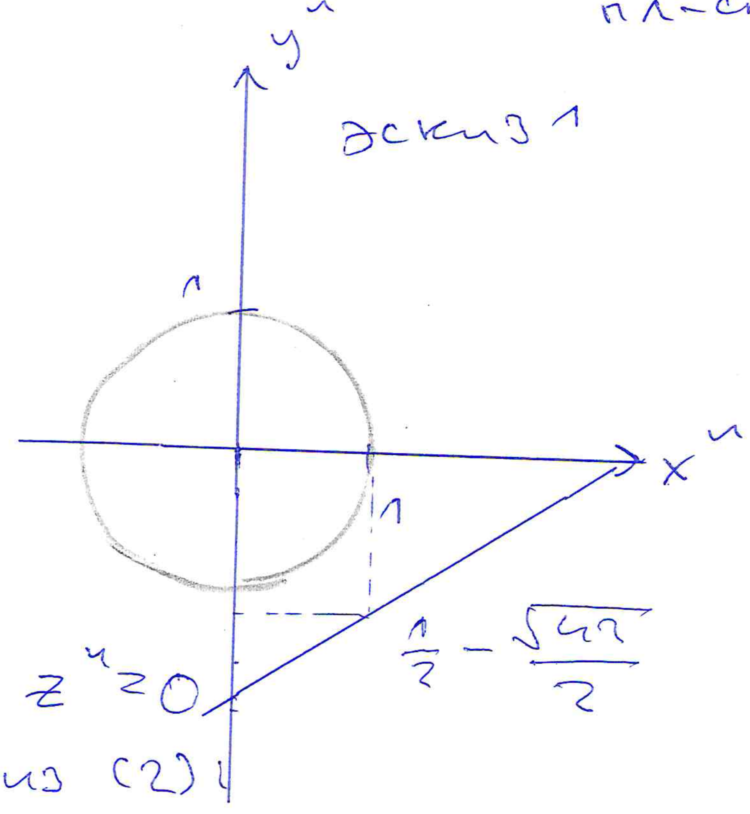
так как в ~~...~~ пересечении всех трех декартовых плоскостей шаром и плоскостью, прямая не пересекает окружность, то исходные плоскость и шар вообще не пересекаются $\Rightarrow$ исходная система не имеет решений

Ответ: нет решений.

если пересечение плоскостью шара выполняется, то очевидно, что хотя бы в одной декартовой плоскости из плоскостей $y^4(x^4)$; $y^4(z^4)$; $z^4(x^4)$
(принимаем) $(x^4=0)$ $(y^4=0)$
$z^4=0$
мы увидем это пересечение.

построем такие пересечения шаром ~~декартовых плоскостей~~ и плоскостью (2) декартовых плоскостей.

очевидно, что сечение шара любой плоскостью — это окружность, а пересеч плоскостью дек коор. пл-сти — прямая

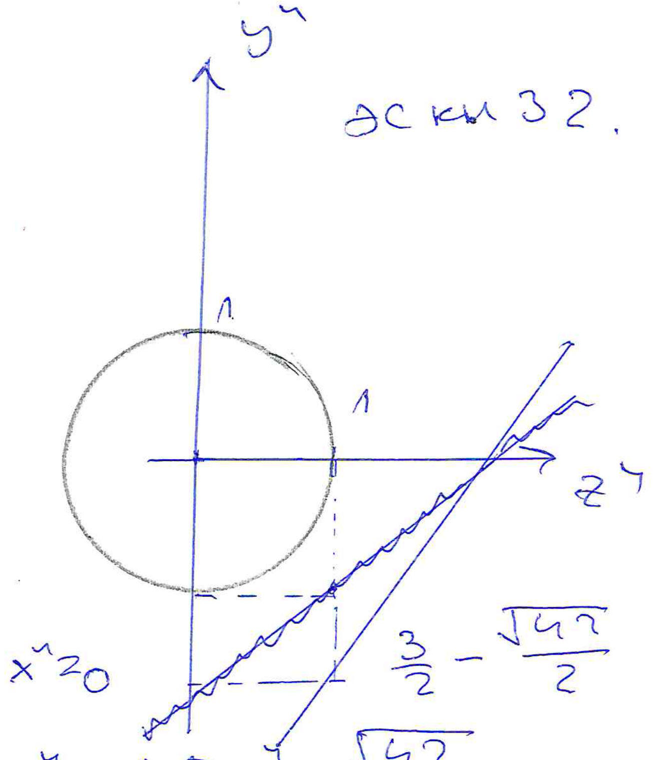


$z^4=0$

из (2):

$$y^4=\frac{x^4}{2}-\frac{\sqrt{42}}{2}$$

$$3<\frac{\sqrt{42}}{2}<3,5$$



$x^4=0$

$$y^4=1,5z^4-\frac{\sqrt{42}}{2}$$

$$3<\frac{\sqrt{42}}{2}<3,5$$