



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

3 2 8 2 6

Класс 10

Вариант 22

Дата Олимпиады 9.02.2019

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	30	80	Восемьдесят	

Задание №1

$$A = 13^{2017} + 13^{2018} + 13^{2019} = 13^{2017} (1 + 13 + 13^2) = 13^{2017} (14 + 169) = 13^{2017} \cdot 183 = 13^{2017} \cdot 3 \cdot 61 \Rightarrow 61:61 \Rightarrow \text{Если хотя бы один из множителей числа } A \text{ делится на } 61, \text{ то и все число } A \text{ делится на } 61 \Rightarrow A:61$$

У.П.Д. ⊕ 55

Задание №3

$$\begin{cases} x+3y & x+y=9 \\ x^2+y^2 & +xy=7 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)+3xy=9 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+3b=9 \\ a^2-b=7 \end{cases} \cdot 3 + \begin{cases} a+3b=9 \\ 3a^2-3b=21 \end{cases}$$

$$3a^2+a=30$$

Пусть: $x+y=a$
 $x \cdot y=b$

$$3a^2+a-30=0$$

$$D=1-4 \cdot 3 \cdot (-30)=1+360=361$$

$$a=\frac{-1+19}{6}=\frac{18}{6}=3$$

$$a=\frac{-1-19}{6}=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}$$

Подставим значение переменной a в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} a=3 \\ 3+3b=9 \end{cases} \quad \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a=-\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3}+3b=9 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{10}{3} \\ b=4\frac{1}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\frac{10}{3} \\ xy=4\frac{1}{9} \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему (1):

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases}$$

Подставим значение переменной x в первое уравнение системы

Решим систему (2):

$$\begin{cases} x+y=-\frac{10}{3} \\ xy=4\frac{1}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\frac{10}{3} \\ x=\frac{37}{9} \end{cases}$$

Подставим значение переменной x в первое уравнение системы

ШИФР

--	--	--	--	--	--

$$\frac{2}{y} + y = 3$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$y = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$y = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: (2; 1); (1; 2)

15

Задача 5

Дано: МС > Г на 800

$$D_{MC} = 5D_G$$

$$H_{MC} = n + D_G, n \in [6; 9]$$

$$H_G > D_G \text{ на } 600$$

Найти: МС + Г - ?

Решение:

$$1. H_G - D_G = 600 \Rightarrow D_G = H_G - 600$$

$$2. \begin{cases} MC - G = 800 \\ MC = D_{MC} + H_{MC} \end{cases} \Rightarrow D_{MC} + H_{MC} - D_G - H_G = 800$$

$$\begin{cases} MC = D_{MC} + H_{MC} \\ G = D_G + H_G \end{cases} \Rightarrow D_{MC} + H_{MC} - D_G - H_G = 800$$

$$3. 5D_G + n + D_G - D_G - H_G = 800$$

$$4D_G + H_G(n-1) = 800$$

$$4(H_G - 600) + H_G(n-1) = 800$$

$$4H_G - 2400 + H_G(n-1) = 800$$

$$H_G(n+3) = 1040$$

$$H_G = \frac{1040}{n+3}$$

Число юношей, подавших заявление в геолого-разведочный факультет — целое число, поэтому $(n+3)$ — один из делителей числа 1040.



$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

--	--	--	--	--

4. $n \in [6; 9] \Rightarrow n+3$ может принимать следующие значения

$$\bullet 6+3=9=3 \cdot 3$$

$$\bullet 7+3=10=2 \cdot 5$$

$$\bullet 8+3=11$$

$$\bullet 9+3=12=3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$5. 10r = \frac{1040}{10} = 104$$

$$2r = 10r - 60 = 104 - 60 = 44$$

$$2mc = 52r = 5 \cdot 44 = 220$$

$$10mc = 710r = 7 \cdot 104 = 728$$

Алгоритм числа 1040:

$$1040 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \Rightarrow$$

$n+3$ принимает значение 10 $\Rightarrow n=7$

6. Общее количество пожарных заявлений:

$$mc + r = 44 + 104 + 220 + 728 = 1096$$

Ответ: 1096 заявлений.

200

Дано:

Задача 6

$$y = -2x + \sqrt{(x^2 - 10x + 25)(x^2 - 4x + 4)}$$

$$x \in \left[\frac{9}{4}; 6\right]$$

Найти: $y_{\text{наиб}}$ - ?
 $y_{\text{наим}}$ - ?

Решение:

1. В данной функции подкоренное выражение может принимать неотрицательные значения $\Rightarrow$ на отрезке $x \in \left[\frac{9}{4}; 6\right]$ $y(x)$ примет наименьшее значение только при условии, что $\sqrt{(x^2 - 10x + 25)(x^2 - 4x + 4)} = 0 \Rightarrow$ данное выражение принимает "0" если $x=2$ или $x=5 \Rightarrow$ на заданном отрезке $\left[\frac{9}{4}; 6\right]$ $y_{\text{наим}} = -2 \cdot 5 = -10$ при $x=5$

2. Наименьшее значение $y(x)$ принимает при $x=2\frac{1}{2}$

$$y(2) = -4$$

$$y(3) = -5$$

$$y(4) = -6$$

$$y(5) = -10$$

$$y(6) = -8$$

$$\left. \begin{array}{l} y(2) = -4 \\ y(3) = -5 \\ y(4) = -6 \\ y(5) = -10 \\ y(6) = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow y_{\text{наиб}} = y\left(2\frac{1}{2}\right) = -5 + \sqrt{\frac{25}{4} \cdot \frac{1}{4}} = -5 + \frac{5}{4} = -3\frac{3}{4}$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = -10$ ($x=5$)

$y_{\text{наиб}} = -3\frac{3}{4}$ ($x=2\frac{1}{2}$)

300

Задание 2

1. Общее время заплыва второго пловца: $100\text{м} : 2\frac{\text{м}}{\text{с}} = 50\text{с} \Rightarrow$ Пловцу дистанции он преодолел за 25с.
2. Пусть x - интервал времени между моментами старта пловцов, y - скорость первого пловца. По условиям задачи первый пловец медленнее второго $\Rightarrow$ в момент времени через 2с после момента поворота второго пловца он находится на первом участке пути.
К моменту первой встречи первый пловец был в бассейне $\frac{23}{y}$ с или $(x + \frac{23}{2})$ с. К моменту второй встречи первый пловец проплыл $(50 - 2 \cdot 2)\text{м}$ за $(\frac{46}{y})$ или $(25 + 2 + x)\text{с}$.
Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{23}{y} = x + \frac{23}{2} \\ \frac{46}{y} = 27 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{23}{y} = 2x + 23 \\ \frac{46}{y} = 27 + x \end{cases} \Rightarrow \frac{23}{46} = \frac{2x + 23}{27 + x}$$

$$\frac{2x + 23}{27 + x} = 1$$

$$\frac{4x + 46}{3x} = 27 + x$$

$$\frac{2x + 23}{27 + x} = 1$$

$$2x + 23 = 27 + x$$

$$x = 4 - \text{задержка между стартами пловцов}$$

Ответ: 4с.

10

Задание 4

$$\sqrt[n]{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}} + \sqrt[n]{\sqrt{2018} - \sqrt{2017}} > 2$$

1. Возведем выражение в степень n

$$\begin{aligned} & \sqrt{2018} + \sqrt{2017} + \sqrt{2018} - \sqrt{2017} + n \sqrt{2018} + \sqrt{2017} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}} (\dots) \\ & = 2\sqrt{2018} + n \sqrt{(\sqrt{2018})^2 - (\sqrt{2017})^2} (\dots) = \\ & = 2\sqrt{2018} + n(\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{2\sqrt{2018} + n(\dots)} > 2 \\ & 2\sqrt{2018} + n(\dots) > 2^n \end{aligned}$$

0