ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 6 3 6

Класс 10 Г Вариант 22 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	30	100	сто	

№1. $A = 13^{2017} + 13^{2018} + 13^{2019} = 13^{2017}(1+13^1+13^2) = 13^{2017}(1+13+169) = 13^{2017}\cdot 183 = 13^{2017}\cdot 3\cdot 61 \Rightarrow$ раз есть множитель 61, то $A \vdots 61$, ч.т.д.

5

№3. $\begin{cases} x+3xy+y=9, \\ x^2+y^2+xy=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x+3xy+y=9, \\ (x+y)^2-xy=7; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=(x+y)^2-7, & (1) \\ (x+y)+3xy=9. & (2) \end{cases}$

Пусть $x+y=a$, тогда $x=a-y$;

$a+3(a^2-7)=9$

$a+3a^2-21-9=0$

$3a^2+a-30=0$

$D=b^2-4ac=1+360=361=19^2$

$a_1=\frac{-1+19}{3\cdot 2}=\frac{18}{6}=3,$

$a_2=\frac{-1-19}{3\cdot 2}=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}.$

тогда уравнени (2): $a+3(a-y)y=9$

$a+3ay-3y^2=9$

$3y^2-3ay+9-a=0$

1) если $a=3$, то

$3y^2-9y+6=0$

$y^2-3y+2=0$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right.$

2) если $a=-\frac{10}{3}$, то

$3y^2+10y+9+3\frac{1}{3}=0$

$3y^2+10y+12\frac{1}{3}=0$

$D=b^2-4ac=100-4\cdot 3\cdot 12\frac{1}{3}<0$, реш. нет, ибо x и y — действительные числа.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР

Тогда получим что при $a=3$ $y=1$ или $y=2$, что равносильно ~~системе~~ совокупности $(a=x+y)$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;2)$; $(2;1)$. + 15

№4. $\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}+\sqrt[n]{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}>2$.

Домножим все на $\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}$:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}\right)^2+\sqrt[n]{(\sqrt{2018}-\sqrt{2017})(\sqrt{2018}+\sqrt{2017})}>2\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}.$$

Пусть $\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}=k$, тогда

$$k^2+\sqrt[n]{(\sqrt{2018})^2-(\sqrt{2017})^2}>2k$$

$$k^2+\sqrt[n]{2018-2017}>2k$$

$$k^2+\sqrt[n]{1}>2k$$

$$k^2+1-2k>0$$

$$(k-1)^2>0$$ + 20б

А это истинно для всех k, кроме единицы. Но мы помним, что $k=\sqrt[n]{\sqrt{2018}+\sqrt{2017}}$, а это заведомо больше единицы. Тогда выражение $(k-1)^2$ всегда больше 0, а значит, данное неравенство истинно, ч.т.д.

№5. Пусть в геологоразведческий было подано x заявлений, из которых k от девушек и d от юношей. Тогда в ~~минеральн~~ минерального сырья переработку было отдано $(800+x)$ заявлений, или $5k+dn$. По условию на геологоразведочный подано юношами на 60 заявлений больше, то есть $d=k+60$. Тогда на переработку минерального сырья было подано заявлений на 800 больше, чем на геолого-

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР

разведочный, или на $(5k+dn)-(k+d) = 4k + d(n-1) = 4k+(k+60)(n-1)$.

$4k + (k+60)(n-1) = 800$

$4k + kn + 60n - k - 60 = 800$

$3k + n(k+60) = 860$

$n(k+60) = 860 - 3k$

$n = \dfrac{860-3k}{k+60}$.

По условию, $6 \le n \le 9$, причем не сказано, что $n \in \mathbb{Z}$. Тогда:

$6 \le \dfrac{860-3k}{k+60} \le 9 \quad | \cdot k+60$, т.к. $k>0$, $k+60>0$

$6k+360 \le 860-3k \le 9k+540 \quad | -6k-360$

$0 \le 500-9k \le 3k+180$

$0 \le 500-9k \Rightarrow 9k \le 500 \Rightarrow k \le \dfrac{500}{9} \Rightarrow k \le 55\frac{5}{9}$

$500-9k \le 3k+180 \Rightarrow 12k \ge 320 \Rightarrow k \ge \dfrac{320}{12} \Rightarrow k \ge \dfrac{80}{3} \Rightarrow k \ge 26\frac{2}{3}$

То есть $26\frac{2}{3} \le k \le 55\frac{5}{9}$. Т.к. k – это число девушек, подавших заявление, то $k \in \mathbb{Z}$, то есть $27 \le k \le 55$.

Общее кол-во заявлений – это $800 + x + x = 800 + 2x$, $x = k + d =$ $= k + (k+60) = 2k+60 \Rightarrow$ ~~Тогда~~ всего заявлений $800 + 2(2k+60) =$ $= 800 + 4k + 120 = 920 + 4k$.

Ответ: общее кол-во заявлений описывается формулой $(920+4k)$ заявлений, где $27 \le k \le 55$, $k \in \mathbb{N}$.

P.S. Если в задаче подразумевается, что $n \in \mathbb{Z}$:

$n = \dfrac{860-3k}{k+60} \Rightarrow 860 - 3k = nk + 60n$. ~~Выше было посчитано, что при $n=6$ $k = 26\frac{2}{3}$, а при $n=9$ $k = \frac{500}{9} = 55\frac{5}{9}$~~

Если $n=6$: $860-3k=6k+360$
$9k=500$
$k=\frac{500}{9}$, $k\notin\mathbb{Z}$.

Если $n=7$: $860-3k=7k+420$
$10k=440$
$k=44$, $k\in\mathbb{Z}$.

Если $n=8$: $860-3k=8k-480$
$11k=380$
$k=\frac{380}{11}$, $k\notin\mathbb{Z}$.

Если $n=9$, то $860-3k=9k-540$
$12k=320$
$k=26\frac{2}{3}$, $k\notin\mathbb{Z}$.

Из всех вышеперечисленных значений условию является только $k=44$ при $n=7$, и тогда всего заявлений было подано $\cancel{920}+4\cdot 44=$ $=920+160+16=1096$.

⊕ 2б

№6. $y=-2x+\sqrt{(x^2-10x+25)(x^2-4x+4)}=-2x+\sqrt{(x-5)^2\cdot(x-2)^2}=$
$=-2x+|x-5|\cdot|x-2|$

Дан отрезок $\left[\frac{9}{4};6\right]$, т.е. $\left[2\frac{1}{4};6\right]$; разобьем его на два интервала $\left[2\frac{1}{4};5\right)$ и $[5;6]$. Тогда для интервала $\left[2\frac{1}{4};5\right)$:

$|x-5|=5-x$
$|x-2|=x-2$

$y=-2x+(5-x)(x-2)=-x^2+7x-10-2x=-x^2+5x-10$

$x_b=\frac{-b}{2a}=\frac{-5}{-2}=2{,}5$

$y_b=-6{,}25+12{,}5-10=6{,}25-10=-3{,}75$

$y(5)=-25+25-10=-10$

$y(2\frac{1}{4})=-\frac{81}{16}+\frac{45}{4}-10=\frac{\cancel{16}1}{\cancel{16}}-\frac{61}{16}=-3\frac{13}{16}$

$y(3)=-9+15-10=-4$
$y(4)=-16+20-10=-6$

Для интервала $[5;6]$:

$|x-5|=x-5$

$|x-2|=x-2$

$y=-2x+(x-5)(x-2)=-2x+x^2-7x+10=x^2-9x+10$

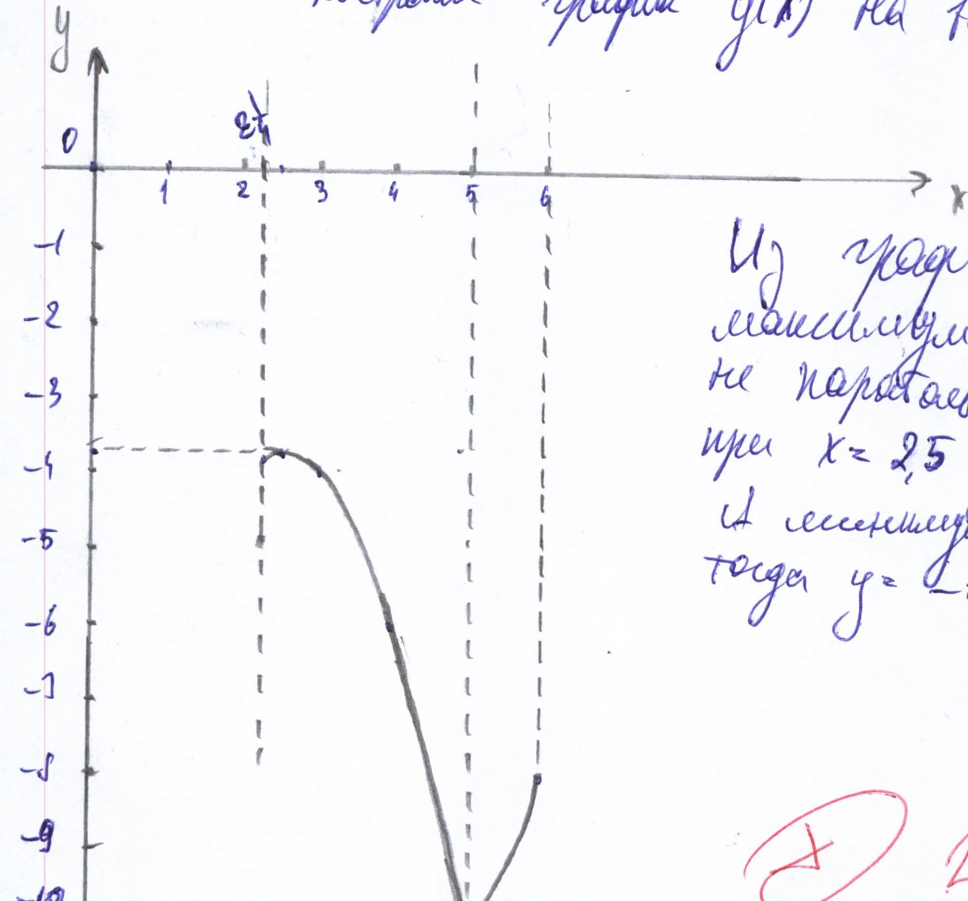
$x_b=\frac{-b}{2a}=\frac{9}{2}=4,5$

$y_b=20,25-40,5+10=10-20,25=-10,25$

$y(5)=25+10-45=-10$

$y(6)=36-54+10=46-54=-8.$

Схематично построим график $y(x)$ на всем заданном интервале:



Из графика легко видеть, что максимум достигается в вершине параболы первого интервала, при $x=2,5$ $y=-3,75$

А минимум достигается при $x=5$, тогда $y=-10$.

30

Ответ: наибольшее значение – $(-3,75)$, наименьшее – (-10).

№2 ~~Перв~~ Пусть скорость первого пловца x м/с, разница во времени t с. Тогда для первой встречи второй плыл $\frac{l}{v} = \frac{23 м}{2 м/с} = 11{,}5 с$, тогда можем записать уравнение для первого:

$x(t + 11{,}5) = 23$.

Для второй встречи:

второй проплыл весь бассейн за $\frac{50 м}{2 м/с} = 25 с$, значит, до встречи с первым во второй раз он плыл $25 + 2 = 27$ с. Очевидно, что второй стартует позже и его скорость выше, нежели скорость первого, и в тот момент, когда второй встретит первого во второй раз, первый еще не проплывет бассейн, но вместе первый и второй проплывут $50 \cdot 2 = 100$ м, очевидно почему (на момент второй встречи, разумеется). Тогда можем записать: $x(t + 27) + 2 \cdot 27 = 100$. Запишем эти уравнения в систему:

$\begin{cases} x(t+27) + 54 = 100, \\ x(t + 11{,}5) = 23, \end{cases}$ $\begin{cases} x(t+27) = 46, \\ x(t + 11{,}5) = 23 \end{cases}$ Делим первое на второе, получаем

$\frac{x(t+27)}{x(t+11{,}5)} = \frac{46}{23} \Rightarrow \frac{t+27}{t+11{,}5} = 2 \Rightarrow t + 27 = 2t + 23 \Rightarrow t = 27 - 23 \Rightarrow t = 4$ (с).

Значит, между моментами старта пловцов прошло 4 секунды.

Ответ: 4 секунды.

⊕ 10б