ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$ $u=\frac{2}{3}\sqrt{u}$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 9042

Класс 10 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	9 → 10	8 → 10	10 → 9	15	0	20 → 10	80 → 79	восемьдесят	

№4

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{3}{2} \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$

$\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=2-\log_4\left(\frac{16}{3}\right)$

Заметим, что $2=\log_4 16$.

Мы знаем, что 1) $\log_c a+\log_c b=\log_c ab$; 2) $\log_c a-\log_c b=\log_c\left(\frac{a}{b}\right)$

$\log_4(2x+3)(x-1)=\log_4\left(\frac{16}{\frac{16}{3}}\right)$

$\log_4(2x+3)(x-1)=\log_4 3$

$(2x+3)(x-1)=3$

$2x^2+3x-2x-3=3$

$2x^2+x-6=0$

$D=1+4\cdot2\cdot6=49$

$x_1=\frac{-1+7}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$x_2=\frac{-1-7}{4}=\frac{-8}{4}=-2$ - не удовл. ОДЗ $(x>1)$

Ответ: $x=\frac{3}{2}$

№1

$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

Произведем замену:

$\int x^2+2x=t$

Тогда исходн. ур-ие имеет вид

$(t+2)(t-2)=5$

$t^2-4=5$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 9042

$t^2 = 9$

$t = \pm 3$

1) $t = 3$

$x^2 + 2x = 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

2) $t = -3$

$x^2 + 2x = -3$

$x^2 + 2x + 3 = 0$

$D = 4 - 12 < 0 \Rightarrow$ корней нет

Ответ: $x = -3$, $x = 1$

№ 3

ОДЗ: $x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

$\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$

$\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 < 0$

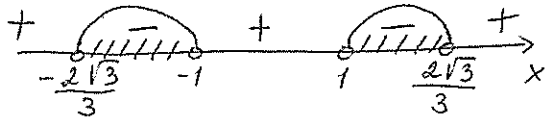
$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$ – приведем к общ. знаменателю.

$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0$

$\frac{3(x^2-\frac{4}{3})}{x^2-1} < 0 \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{x^2-\frac{4}{3}}{x^2-1} < 0$

$\frac{(x-\frac{2}{\sqrt{3}})(x+\frac{2}{\sqrt{3}})}{(x-1)(x+1)} < 0$



сравним $\frac{2}{\sqrt{3}}$ и 1

$\frac{2\sqrt{3}}{3} > \frac{3}{3}$

$2 > \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}$ находится правее 1 на оси OX.

Аналогично $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$ находится левее (-1) на оси OX.

Значит, $x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Ответ: $x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

№5

$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$

Сделаем замену:

$\int 2^x = t, \; t > 0$

Тогда

$(2^x)^2 > 4 - 3 \cdot 2^x \iff t^2 > 4 - 3t$

$t^2 + 3t - 4 > 0$

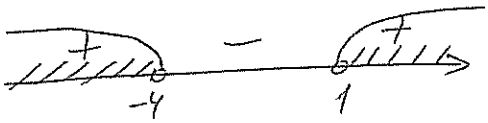
$t^2 + 3t - 4 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$t_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$t_2 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 < 0$ (не удовл. ОДЗ: $t > 0$)

$(t-1)(t+4) > 0$



Промежуток $(-\infty; -4)$ не подходит, т.к. $t > 0$ (ОДЗ).

Значит, $t > 1$

$2^x > 1$

$2^x > 2^0$

$x > 0$

Ответ: $x > 0$ ✓

№2

$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 9042

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x \geq 3$

Для удобства перепишем исх. ур-ие:

$\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x} = -\sqrt{2x+1}$

Возведём в квадрат:

$(\sqrt{x-3})^2 - 2\sqrt{x-3}\cdot 2\sqrt{x} + 2^2(\sqrt{x})^2 = (-1)^2(\sqrt{2x+1})^2$

~~$|x-3| - 4\sqrt{(x-3)x} + 4|x| = |2x+$~~

$x-3-4\sqrt{x(x-3)}+4x = 2x+1$

$4\sqrt{x(x-3)} = 3x-4$

Возведём в квадрат:

$16x(x-3) = 9x^2 - 24x + 16$

$16x^2 - 48x = 9x^2 - 24x + 16$

$7x^2 - 24x - 16 = 0$

$D = 576 + 4\cdot 7\cdot 16 = 576 + 448 = 1024$

$x_1 = \frac{24+32}{14} = \frac{56}{14} = 4$

$x_2 = \frac{24-32}{14} = -\frac{8}{14} < 3$ - не удовл. усл. $x \geq 3$ (ОДЗ).

Ответ: $x = 4$

№ 6

Пусть a чел - планировалось принять на специальность A, b чел - на спец-ть B, c чел - на спец-ть C.

Тогда $a+b+c = 100\%$ (по плану)

По условию $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, $\frac{b}{c} = \frac{3}{6}$, $\frac{c}{a} = \frac{6}{4}$, т.е. $3a = 4b$, $2b = c$, $3a = 2c$.

В сумме $(a+b+c)$ ~~заменим a и c~~ выразим a и c через b:

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 9042

$a+b+c = \frac{4b}{3} + b + 2b = \frac{4b}{3} + \frac{9b}{3} = \frac{13b}{3} = 100\%$ (по плану)

Тогда $7\frac{9}{13}\%$ от плана приёма равно:

$\frac{7\frac{9}{13} \cdot \frac{13b}{3}}{100} = \frac{\frac{100}{13} \cdot \frac{13b}{3}}{100} = \frac{100b}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{b}{3}$ – на столько человек больше было принято в действительности (на все 3 специальности вместе).

Из условия мы знаем, что в действительности было принято на $4+5+6=15$ человек больше, чем по плану (на все 3 специальности в сумме).

Значит, $\frac{b}{3} = 15$, т.е. $b = 45$ чел. ~~– больше~~

$a = \frac{4b}{3} = \frac{4 \cdot 45}{3} = 60$ чел. ~~больше~~

$c = 2b = 2 \cdot 45 = 90$ чел.

Получается, 60 чел планировалось принять на специальность A, а в действительности было принято $60+4=64$ чел, аналогично на B было принято $45+5=50$ чел; на C – $90+6=96$.

Ответ: 64 чел – на A, 50 чел – на B, 96 чел – на C.

№7

$\exists\, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ – члены геометр. прогрессии.

q – её знаменатель.

$b_1 = 1$

$b_5 + b_9 = 6$

$+\begin{cases} b_5 = b_1 \cdot q^4 \\ b_9 = b_1 \cdot q^8 \end{cases}$

~~$b_5 + b_9 = b_1 q^4 (q^4+1)$~~

$b_5 + b_9 = b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^8 = b_1 q^4 (1+q^4) = q^8 + q^4 = 6$

Сделаем замену:

$\exists\, q^4 = t,\ t > 0$

Тогда

$t^2+t-6=0$

$D=1+24=25$

$t_1=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$ $\quad t_2=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3<0$ - не удовл ОДЗ: $t>0$

Значит, $q^4=2$, т.е. $q=\pm\sqrt[4]{2}$

~~Мы знаем, что~~ $S_n=\frac{q(q^n-1)}{q-1}$!

1) $q=\sqrt[4]{2}$

Запишем первые 13 членов этой прогрессии:

$1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, 2, 2\sqrt[4]{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2\sqrt{2}}, 4, 4\sqrt[4]{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2\sqrt{2}}, 8$

Их сумма равна:

$(1+2+4+8)+\sqrt[4]{2}(1+2+4)+\sqrt{2}(1+2+4)+\sqrt{2\sqrt{2}}(1+2+4)=$

$=7\sqrt[4]{2}+7\sqrt{2}+7\sqrt{2\sqrt{2}}+15$

2) $q=-\sqrt[4]{2}$

Запишем первые 13 членов геометр. прогр:

$1, -\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2\sqrt{2}}, 2, -2\sqrt[4]{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2\sqrt{2}}, 4, -4\sqrt[4]{2}, 4\sqrt{2}, -4\sqrt{2\sqrt{2}}, 8.$

Их сумма равна:

$(1+2+4+8)-\sqrt[4]{2}(1+2+4)+\sqrt{2}(1+2+4)-\sqrt{2\sqrt{2}}(1+2+4)=$

$=15-7\sqrt[4]{2}+7\sqrt{2}-7\sqrt{2\sqrt{2}}$

Ответ: 1) $7\sqrt[4]{2}+7\sqrt{2}+7\sqrt{2\sqrt{2}}+15$;

2) $15-7\sqrt[4]{2}+7\sqrt{2}-7\sqrt{2\sqrt{2}}$.

№ 10

$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=x$

$20>\sqrt{392} \Rightarrow (20-\sqrt{392})>0$

Возведем данное вир-ие в куб:

$\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})(20-\sqrt{392})}\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right) = 20+\sqrt{392}+20-\sqrt{392}+3\sqrt[3]{400-392}\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right) = 40+6\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right) = x^3$

~~Возведем полученное ур-ие в куб:~~ $= x$

Заметим, что в полученном вир-нии $\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right) = x$

Тогда

$40+6x=x^3$

$x^3-6x-40=0$

$x=4$ – корень этого ур-ия

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x-40 & x-4 \\ \hline -\,x^3-4x^2 & \\ \hline 4x^2-6x & x^2+4x+10 \\ -\,4x^2-16x & \\ \hline 10x-40 & \\ -\,10x-40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Заметим, что $x^2+4x+10$ не имеет корней, т.к.

$D = 16-4\cdot 10 < 0$.

Значит, единственной корень ур-ия $x^3-6x-40 = (x-4)(x^2+4x+10)$ это $x=4$.

Значит, искомая сумма равна 4.

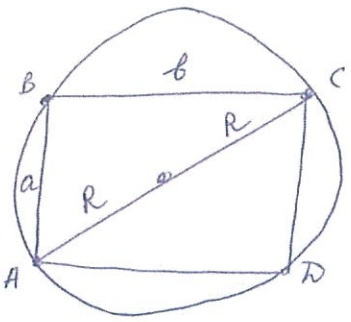
Ответ: 4

№8

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

ШИФР 9042



Пусть a, b - стороны прямоугольника.

$S_{круга} = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ (кв.ед.) - площадь круга.

По условию $S_{круга} = 2S_{прям}$ ($S_{прям}$ - площадь прямоугольника), т.е.

$100\pi = 2ab$

$ab = 50\pi$ (см^2)

$\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$ он опирается на диаметр (AC).

По теореме Пифагора:

$a^2 + b^2 = (2R)^2$, т.е.

$a^2 + b^2 = 4 \cdot 400 = 1600$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1600 \\ ab = 50\pi \end{cases}, \quad a = \frac{50\pi}{b}$$

$$\frac{2500\pi^2}{b^2} + b^2 = 1600$$

$$\frac{2500\pi^2 + b^4 - 1600b^2}{b^2} = 0 \qquad b^2 \neq 0, \; b \neq 0$$

Пусть $b^2 = t$, $t > 0$

$t^2 - 1600t + 2500\pi^2 = 0$

$D = 1600^2 - 4 \cdot 2500\pi^2 = 2560000 - 10000\pi^2 =$

$= 10000(256 - \pi^2)$

$t_1 = \frac{1600 - 100\sqrt{256 - \pi^2}}{2}$, $t_2 = \frac{1600 + 100\sqrt{256 - \pi^2}}{2}$

~~$t_2 < 0$ не удовл. ОДЗ~~

$b^2 = 800 - 50\sqrt{256 - \pi^2}$

$b = \sqrt{800 - 50\sqrt{256 - \pi^2}}$, $a = \frac{50\pi}{\sqrt{800 - 50\sqrt{256 - \pi^2}}}$

$b^2 = 800 + 50\sqrt{256 - \pi^2}$

$b = \sqrt{800 + 50\sqrt{256 - \pi^2}}$, $a = \frac{50\pi}{\sqrt{800 + 50\sqrt{256 - \pi^2}}}$

Ответ: 1) $\frac{50\pi}{\sqrt{800 - 50\sqrt{256 - \pi^2}}}$ и $\sqrt{800 - 50\sqrt{256 - \pi^2}}$; 2) $\frac{50\pi}{\sqrt{800 + 50\sqrt{256 - \pi^2}}}$ и $\sqrt{800 + 50\sqrt{256 - \pi^2}}$