

Номер варианта	6		
----------------	---	--	--

Класс 11

Вариант 6

Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	—	50	50	50	100	100	70	—	50	200	620	шестьдесят семь десятков два	<i>[Signature]</i>

1. $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 2) = 5.$

$(x^2 + 2x)^2 - 2^2 = 5.$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = 0.$

$x_1 = 1, \quad 1 + 4 + 4 - 9 = 0.$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-x^4 - x^3} \\ -5x^3 + 4x^2 - 9 \\ \underline{-5x^3 + 5x^2} \\ -9x^2 - 9 \\ \underline{-9x^2 - 9x} \\ 9x - 9 \\ \underline{-9x + 9} \\ 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^3 + 5x^2 + 9x + 9) = 0.$

$(x^3 + 5x^2 + 9x + 9)' = 3x^2 + 10x + 9 \Rightarrow D < 0. \Rightarrow \text{уравнения системы } OX \text{ нет.}$

Ответ: $x = 1$

2. $(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3})^2 = (2\sqrt{x})^2$

ОДЗ

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ОДЗ } x \geq 3$$

$\sqrt{(2x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + 2\sqrt{2x^2 - 6x + x - 3} = 4x$

$2x+1 + x-3 + 2\sqrt{2x^2 - 5x - 3} = 4x$

$3x - 2 = -2\sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

$(x+2)^2 = (2\sqrt{2x^2 - 5x - 3})^2$

$x^2 + 4x + 4 = 4 \cdot (2x^2 - 5x - 3) = 8x^2 - 20x - 12.$

$7x^2 - 24x - 16 = 0; \quad D_1 = 256 = 16^2 \Rightarrow$

Ответ: $x = 4$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12+16}{7} = \frac{28}{7} = 4 \text{ (удовл. ОДЗ)} \\ x_2 = \frac{12-16}{7} = -\frac{4}{7} \text{ (не удовл. ОДЗ)} \end{cases}$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

14176

$$9). \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y + 2 \sin x \cdot \cos y = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\sin^2 x + 1 - \sin^2 y = 1$$

$$\sin^2 x = \sin^2 y$$

$$\sin x = \sin y$$

$$x = \arcsin(\sin y) \Rightarrow x = y$$

$$\sin x \cdot \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \\ 2x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_1 = \frac{2\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_2 = \frac{5\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

$$7). b_1 = 1$$

$$b_5 + b_9 = 6$$

$$S_{13} = ?$$

Решение

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q$$

$$b_4 = b_3 \cdot q$$

$$\vdots$$

$$b_{13} = b_{12} \cdot q$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4$$

$$b_9 = b_1 \cdot q^8$$

$$b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^8 = 6$$

$$q^4 + q^8 = 6$$

Замена $q^4 = t$.

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$D = 25$$

$$t_1 = -3 \text{ (не удов.)}$$

$$t_2 = \sqrt{2} \Rightarrow q = \sqrt[4]{2}$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$$

$$b_3 = \sqrt{2}$$

$$b_4 = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\vdots$$

$$b_{13} = 8$$

Ответ: $15 + \sqrt{2} \cdot 3721$

$$S_{13} = 15 + 2^{\frac{1}{4}} (3721) = 15 + \sqrt{2} \cdot 3721$$

$$\pm 78$$

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

14146

1. $\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$

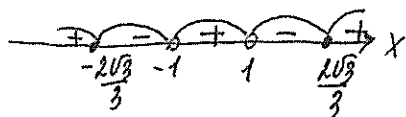
$$\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 < 0.$$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0.$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0.$$

$$(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)(x-1)(x+1) < 0.$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1) \cup (1; \frac{2\sqrt{3}}{3}]$

+50

4). $\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4 \frac{16}{3}$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1.5 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

$$\log_4(2x^2-2x+3x-3) = \log_4 16 - \log_4 \frac{16}{3}$$

$$\log_4(2x^2+x-3) = \log_4 3$$

Основания равны: $\Rightarrow 2x^2+x-3=3$

$$2x^2+x-3-3=0$$

$$2x^2+x-6=0.$$

$$D = 1+48=49$$

$$x_1 = 1.5 \text{ (удовл. ОДЗ)}$$

$$x_2 = -2 \text{ (не удовл. ОДЗ)}$$

+50

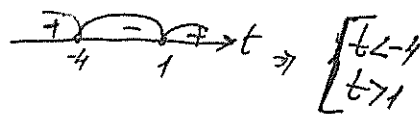
Ответ: $x=1.5$

5). $4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$

$$2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 > 0.$$

Заменим $2^x = t$. $\Rightarrow t^2 + 3t - 4 > 0$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2^x < -4 \\ 2^x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \emptyset \\ 2^x > 2^0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$$

+100

Ответ: $x > 0$

9). x, y, z - студенты на факультете A, B, C соответственно.

$A: x$ $A': x+4$

$B: y$ $B': y+5$

$C: z$ $C': z+6$

Всего на факультете 15 человек $\Rightarrow$
$$\left. \begin{array}{l} 15z - \frac{4}{13} \cdot \frac{9}{13} \% \\ xz - 100\% \end{array} \right\} xz = 195$$

Всего по факультету 195 человек.

Сказано, что $x:y:z$, как $4:3:6 \Rightarrow x + \frac{3}{4}x + \frac{6}{4}x = 195$.

$\frac{13}{4}x = 195$

$A: x = \frac{195 \cdot 4}{13} = 60$ (человек) - по факультету $\Rightarrow A' = 60 + 4 = 64$ человека

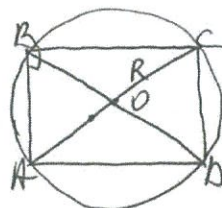
$B: y = \frac{3 \cdot 60}{4} = 45$ (человек) - по факультету $\Rightarrow B' = 45 + 5 = 50$ человек

$C: z = \frac{6 \cdot 60}{4} = 90$ (человек) по факультету $\Rightarrow C' = 90 + 6 = 96$ человек

Ответ: 64; 50; 96.

8). $R = 10$ см

$\frac{S_{\text{прямо.}}}{a, b} = \frac{S_{\text{прямо.}}}{a, b}$



AC - диаметр (по свойству прямоугольника вписанного в окружность)

$AC = 2R$; $AB = a$; $BC = b$

$\triangle ABC$: $a^2 + b^2 = 4R^2 = 400$; $a = \frac{157}{b}$

$64 + 4 - 400b^2 + 157^2 = 0$
 $b^2 \neq 0$; $8^2 = b$
 $b^2 - 400b + 14649 = 0$
 $D =$

10).
$$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 + 12 + 12\sqrt{2} + 8} + \sqrt[3]{(\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot 2 - 2\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 2)^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} = \sqrt[3]{12 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{12 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = 4$$

Ответ: 4 + 200