



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР

4315

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А										
------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Фамилия	Г	Р	И	б	К	О	В													
Имя	А	А	Е	К	С	А	Н	А	Р											
Отчество	С	Е	Р	Р	Е	Е	В	И	Ч											

№ школы	А	И	У	Е	И	П	Р	И	Т	П	У									
Населенный пункт	Т	О	Н	С	К															

Номер варианта	Б		
----------------	---	--	--



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

4315

Класс 11

Вариант 6

Дата Олимпиады 11.02.17.

Площадка написания ТТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	15	20	100	сто	Иванов

① $(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$; ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

$$(x^2+2x)^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)(x^2+2x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ x^2+2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3)=0 \\ x \in \mathbb{D}(0,4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Ответ: $x=1, x=-3$ ✓

② $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$ ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \geq 3}$ ОДЗ

$$\Rightarrow 3x-2+2\sqrt{2x^2-5x-3}=4x \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x-3} = \frac{x+2}{2} \xrightarrow{\text{ОДЗ}} 2x^2-5x-3 = \frac{x^2+4x+4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^2-20x-12 = x^2+4x+4 \Rightarrow 7x^2-24x-16=0$$

$$D_1 = 144 + 7 \cdot 16 = 144 + 112 = 256 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm 16}{7} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

③ $\frac{y^2-2}{x^2-1} < -2, 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-4}{(x-1)(x+1)} < 0$$

Куми: $3x^2-4=0 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} > 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} &= -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} < -1 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad -1 \quad 1 \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array} \Rightarrow x \in (-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1) \cup (1; \frac{2}{\sqrt{3}})$$

Интервалы

Ответ: $x \in (-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1) \cup (1; \frac{2}{\sqrt{3}})$ ✓



④ $\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$, тогда $\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \\ \frac{16}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 1} \Rightarrow \text{ОДЗ}$

$\log_4((2x+3)(x-1)) = \log_4 \frac{16}{3} \Rightarrow \log_4(2x^2+x-3) = \log_4 \frac{16}{3}$

$\Rightarrow 2x^2+x-3 = \frac{16}{3} \Rightarrow 2x^2+x-6 = 0$

$D = 1 + 48 = 49 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 1,5}$

Ответ: $x = 1,5$

⑤ $4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$, $2^{2x} > 4 - 3 \cdot 2^x$

$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 4 > 0$

$(t-1)(t-4) > 0 \Rightarrow$ корни $t=1$, $t=4$

$\Rightarrow$ $t < 1$ или $t > 4$

$t < 1 \Rightarrow 2^x < 1 \Rightarrow x < 0$

$\Rightarrow$ Ответ: $x < 0$ ($x \in (-\infty; 0)$)

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$

⑥ Пусть всего x человек обычно принимаются на специальности
A, B и C $\Rightarrow$ т.к. всего $4+3+6=13$ частей, то на каждую спе-
циальность поступит: $\begin{cases} A - \left(\frac{4}{13}x\right) \text{ человек} \\ B - \left(\frac{3}{13}x\right) \text{ человек} \\ C - \left(\frac{6}{13}x\right) \text{ человек} \end{cases} \Rightarrow$ в действительности на
специальности поступили:



$$\begin{cases} A - \left(\frac{4}{13}x + 4\right) \text{ человек} \\ B - \left(\frac{3}{13}x + 5\right) \text{ человек} \\ C - \left(\frac{6}{13}x + 6\right) \text{ человек} \end{cases}$$

Зная, что макс приема выполнен на
 $100\% + 7\frac{9}{13}\% = 107\frac{9}{13}\%$, составим уравнение
относительно переменной x :

$$\frac{\left(\frac{4}{13}x + 4\right) + \left(\frac{3}{13}x + 5\right) + \left(\frac{6}{13}x + 6\right)}{x} \cdot 100\% = 107\frac{9}{13}\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 15}{x} \cdot 100 = \frac{1391 + 9}{13} \Leftrightarrow \frac{x + 15}{x} = \frac{14}{13}$$

$$\frac{x + 15}{x} = \frac{14}{13} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} \frac{15}{13} \\ + \frac{45}{13} \\ \hline \frac{60}{13} \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 107 \\ \frac{13}{13} \\ \hline \frac{321}{1391} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 13x + 195 = 14x \Rightarrow x = 195 \Rightarrow \text{обычно поступает } 195 \text{ человек} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ соответственно на специальном курсе :

$$\begin{cases} A - \frac{4 \cdot 195}{13} + 4 = 4 \cdot 15 + 4 = 64 \text{ человека} \\ B - \frac{3 \cdot 195}{13} + 5 = 3 \cdot 15 + 5 = 50 \text{ человек} \\ C - \frac{6 \cdot 195}{13} + 6 = 6 \cdot 15 + 6 = 96 \text{ человек} \end{cases}$$

Ответ

$$\begin{array}{r} 195/13 \\ \frac{13}{13} \frac{15}{15} \\ \hline \frac{65}{65} \end{array}$$

⑦ Запишем формулы для n -го члена геометрической прогрессии
и суммируем первые n членов геометрической прогрессии:
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, где a_1 — первый член геометрической прогрессии
 $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, где q — знаменатель геометрической прогрессии

Известно, что $\begin{cases} a_5 + a_9 = 6 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^8 = 6 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow q^4 + q^8 = 6 \Rightarrow q^4(q^4 + 1) = 6 \Rightarrow q^4 + 1 = 6 \Rightarrow q^4 = 5 \Rightarrow q = \sqrt[4]{5} \Rightarrow q^8 = 5$
 $\Rightarrow D = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{D} = 5 \Rightarrow \frac{-1 \pm 5}{2} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^4 = 2 \\ q_2^4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \pm \sqrt[4]{2} \\ q_2 \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow \underline{q = \pm \sqrt[4]{2}}$$

~~Т.к. $a_3 + a_9 = 0$, то арифметическая прогрессия является~~

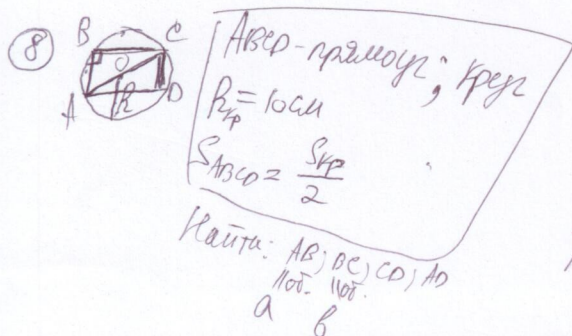
~~возрастающей $q = \sqrt[4]{2}$ $\Rightarrow S_{13} = \frac{a_1(q^{13}-1)}{q-1} = \frac{(4\sqrt[4]{2})^{13}-1}{4\sqrt[4]{2}-1}$~~

$$= \frac{(2^{\frac{13}{4}}-1)(2^{\frac{1}{4}}+1)}{2^{\frac{1}{4}}-1} = \frac{(2^{\frac{13}{4}}-1)(2^{\frac{1}{4}}+1)(2^{\frac{2}{4}}+1)}{2-1} = (2^{\frac{14}{4}}+2^{\frac{13}{4}}-2^{\frac{1}{4}}-1)(2^{\frac{2}{4}}+1) =$$

$$= 2 + 2^{\frac{16}{4}} - 2^{\frac{15}{4}} - 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{2}{4}} + 2 + 2^{\frac{14}{4}} - 2^{\frac{13}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} - 1 = 15 + 2^{\frac{15}{4}} - 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{2}{4}} + 2^{\frac{14}{4}} + 2^{\frac{13}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{2^{\frac{13}{4}}-1}{2^{\frac{1}{4}}-1} = \frac{2^{\frac{3}{4}}-1}{2^{\frac{1}{4}}-1} = \frac{8 \cdot 2^{\frac{1}{4}}-1}{2^{\frac{1}{4}}-1}$$

~~Ответ.~~



Решение: $S_{кр} = \pi R^2 = 100\pi \Rightarrow$
 $\Rightarrow 100\pi = 2ab \Rightarrow ab = 50\pi \text{ см}^2$
 Ас-диagonal прямоугольника $\Rightarrow AC = 2R = 100 \text{ см}$
 По теореме Пифагора: $AC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 100^2 = a^2 + \left(\frac{50\pi}{a}\right)^2 \neq 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} 100 = a^2 + \left(\frac{50\pi}{a}\right)^2 \\ b = \frac{50\pi}{a} \end{cases} \Rightarrow 100a^2 = a^4 + 2500\pi^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^4 - 100a^2 + 2500\pi^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot 2500\pi^2}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 10000\pi^2}}{2}$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

4315

$$t^2 - 400t + 2500\pi^2 = 0;$$

$$D_1 = 40000 - 2500\pi^2 \Rightarrow t = 200 \pm \sqrt{(200-50\pi)(200+50\pi)} \Rightarrow \text{пусть } t =$$

через t мы найдем a . Какое b , мы придем к аналогичному урав.
Т.к. на рисунке $a < b \Rightarrow a^2 = 200 - \sqrt{40000 - 2500\pi^2}$

$$\Rightarrow b = \sqrt{200 + \sqrt{40000 - 2500\pi^2}}, \text{ Т.к. } ab = 50\pi^2 \Rightarrow a = \sqrt{200 - \sqrt{40000 - 2500\pi^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = CD = a = \sqrt{200 - \sqrt{40000 - 2500\pi^2}} \text{ см} \\ BC = AD = b = \sqrt{200 + \sqrt{40000 - 2500\pi^2}} \text{ см} \end{cases}$$

$$\textcircled{9} \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \text{ или } x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \cos y \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \cos y\right) \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 y - 2\cos y(1+\sqrt{3}) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \pm \frac{(1+\sqrt{3})}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \text{ или } \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{10} \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = \left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{40}{\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}} = \frac{40}{40} = 1$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

4315

$$10) \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = ?$$

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} \right)^3 = 20+\sqrt{392} + 20-\sqrt{392} + 3 \left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} \right)^2 \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} + \\ & + 3 \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} \left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} \right)^2 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{100-392} \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + 3 \cdot \sqrt[3]{100-392} \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = \\ & = 40 + 6 \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + 6 \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = 40 + 6 \left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} = a \\ \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = b \end{cases} \Rightarrow (a+b)^3 = 40 + 6(a+b) \Rightarrow$$

$$(a+b)^3 - 6(a+b) - 40 = 0$$

$$a+b = t \Rightarrow t^3 - 6t - 40 = 0$$

$$t = 4 \Rightarrow 4^3 - 6 \cdot 4 - 40 = 64 - 24 - 40 = 0 \text{ (верно)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = 4 \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = 4}$$

Примечание:

$$\begin{array}{r} t = 4 \text{ корень} \Rightarrow t^3 - 6t - 40 \mid t - 4 \\ \underline{t^3 - 4t^2} \\ 6t - 40 \\ \underline{4t^2 - 16t} \\ 10t - 40 \\ \underline{10t - 40} \\ 0 \end{array}$$

Ответ

$$(t-4)(t^2+4t+10) = 0$$

$$\downarrow$$

$$D_1 = 4^2 - 40 < 0 \Rightarrow t \neq 0$$