ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 4 8 6 7

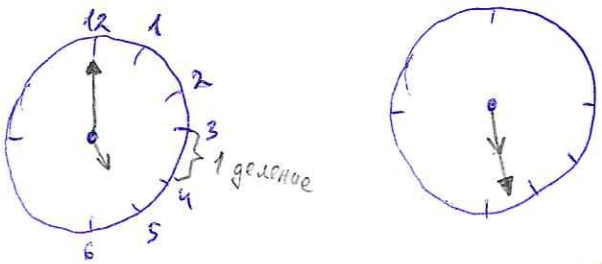
Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания университет ЛЭТИ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	6	20	15	20					76	семьдесят шесть	

№1

Нач. полож. Конечное полож.



За 1 минуту минутная стрелка пройдет $\frac{1}{5}$ деления часов, тогда ее $V_м = \frac{1}{5}$

а часовая за 1 мин. пройдет $\frac{1}{60}$ деления $\Rightarrow$ ее скорость $V_ч = \frac{1}{60}$ $\frac{\text{д}}{\text{мин.}}$

Изначально между стрелками было 5 делений. Составим уравнение:

$5 + \frac{1}{60} \cdot t = \frac{1}{5} \cdot t$, где t – время в минутах, за которое мин. стрелка догонит часовую.

$300 + 1 \cdot t = 12t$

$t = \frac{300}{11}$ минут

$300 : 11 = 27{,}27(27)$

Ответ: через $\frac{300}{11}$ минут или те ~~27,27(27) минут~~, что могли самое

№2

$A = \sqrt{2018} + \sqrt{2020}$

$B = 2\sqrt{2019}$

$A \vee B$

Замечим, что и A, и $B > 0$

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} \vee 2\sqrt{2019}$ Возведём в квадрат

$2018 + 2020 + 2\sqrt{2018 \cdot 2020} \vee 4 \cdot 2019$

$\sqrt{2018 \cdot 2020} \vee 2019$

$\sqrt{2018 \cdot 2020} < \frac{2018 + 2020}{2}$ $\Rightarrow$ Вместо $\vee$ поставим $<$ $\Rightarrow$ $A < B$

$* \quad 2019 = \frac{2018 + 2020}{2}$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ Неравенство о средних

Равенство при $x = y$.

$2018 \neq 2020$

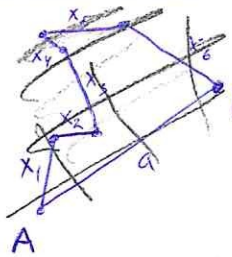
можем уверенно поставить знак благодаря неравенству о средних.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

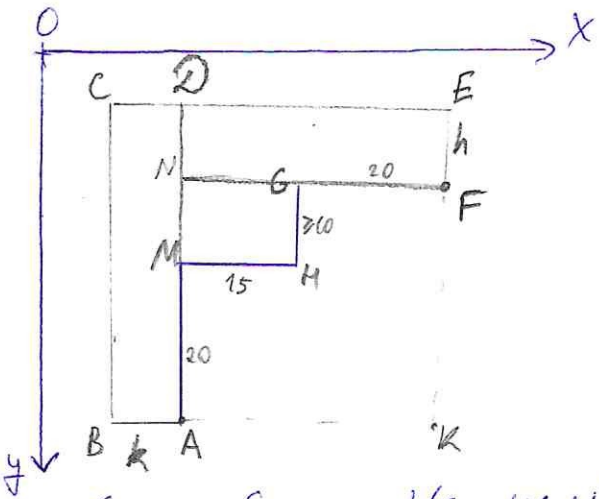
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 3 | 4 | 8 | 6 | 7 |

№6



По свойству ломаной ~~$a < x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$~~



$EF = h$
$BA = k$

$1600 = S_{ABCD} + S_{EFND} + S_{MNGH} = k(20+HG+h) + h\cdot(20+15) + 15\cdot GH =$

$= 20k + k\cdot HG + kh + 35h + 15\cdot HG.$ (*)

Введем оси Ox и Oy так, как показано на рисунке ($\begin{matrix}Ox \parallel CE \\ Oy \parallel CB\end{matrix}$).

Рассмотрим проекцию забора на ось Ox. Она равна длине отрезка CE, но тогда длина забора, параллельного оси Ox, равна $2\cdot CE = 2(k+15+20)$

Аналогично для оси Oy: длина забора, параллельного оси Oy, равна $2\,CB = 2(20+GH+h)$

Тогда длина всего забора $2(20+GH+h+k+15+20) = 2(55+h+k+GH)$

Теперь посмотрим на GH, длина которого не зафиксирована. Предположим, что мы считали k и h для определенного $GH = a_1$. Попробуем увеличить a_1, т.е. взять $a_2 > a_1$, тогда S_{MNGH} ↑ (увеличится) на $(a_2-a_1)\cdot 15 \Rightarrow S_{EFND} + S_{ABCD}$ ↓ на то же $(a_2-a_1)\cdot 15$, но S_{EFND} не зависит от $a_2 \Rightarrow S_{EFND}$ не изменится, а S_{ABCD} ↓ на $(a_2-a_1)\cdot 15$.

$k_2(20+a_2+h) = k_1(20+a_1+h) - (a_2-a_1)\cdot 15$

$k_2(20+a_2+h) + 15a_2 = k_1(20+a_1+h) + 15a_1$

$k_2(20+h) + a_2(k_2+15) = k_1(20+h) + a_1(k_1+15)$

Заметим, что при изменении k S_{ABCD} меняется очень быстро, по крайней мере быстрее, чем у S_{MNGH} при изменении GH → при S_{MNGH} ↓ k уменьшается крайне слабо (т.к. сторона BC – большая) ⇒ увеличивать GH нецелесообразно.

Тогда логично взять минимальный GH, т.е. $GH = 20$.

Обратимся к (*) см. продолжение на след. стр.

№6 (продолжение)

Теперь можно обратиться к (*) с подставленным $GK=10$.

$1600 = 20k + 10k + kh + 35h + 150$

$30k + kh + 35h = 1450$

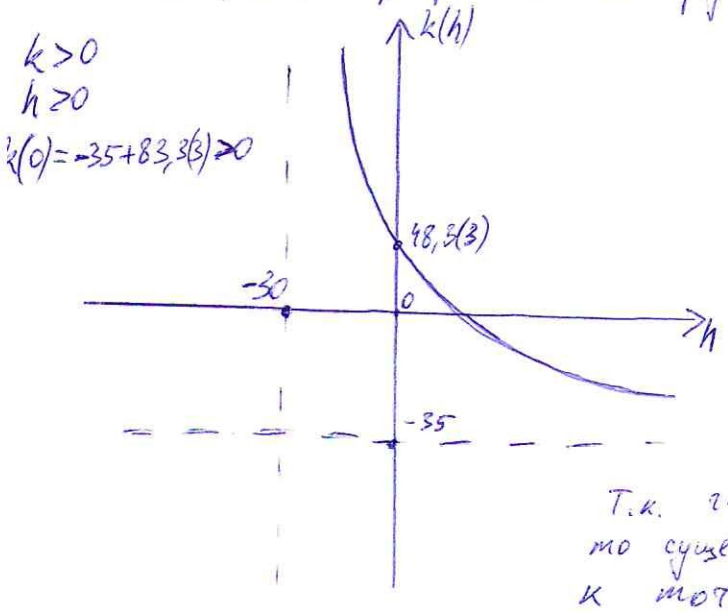
~~Из уравнения видно, что при $\uparrow h$ k уменьшается, и наоборот, при $\uparrow k$ h уменьшается.~~

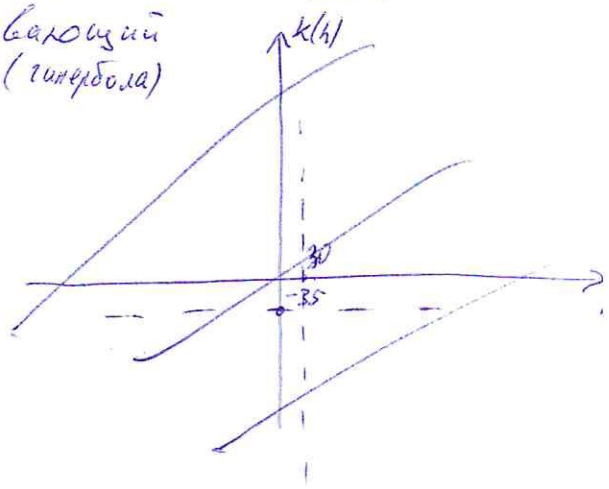
~~Но, судя по коэффициентам, можно понять, что~~

$k(30+h) = 1450 - 35h$

$$k = \frac{1450-35h}{30+h} = \frac{1450+1050-1050-35h}{30+h} = \frac{2500-35(30+h)}{30+h} = -35 + \frac{2500}{30+h}$$

если посмотреть на это, как на функцию $k(h) = -35 + \frac{2500}{30+h}$, то понятно, что график этой функции убывающий (гипербола)





Т.к. гипербола является выпуклым графиком, то существует ровно 1 точка, ближайшая к точке $(0;0)$.

Примерная точка $k(20) = -35 + \frac{2500}{50} = 15$

В таком случае $k=15$, $h=20$, $GH=10$ $\Rightarrow$ длина ограды $= 2(55+20+15+10) = 200$

Ответ: 200 м - длина ограды (наименьшая)
тогда $BK=50$, и $KE=50$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 4 8 6 7

№5

$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+tg^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$

$\Leftrightarrow$

$y = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot \sqrt{|x-2|^2}$

$1-\sin^2 x = \cos^2 x$

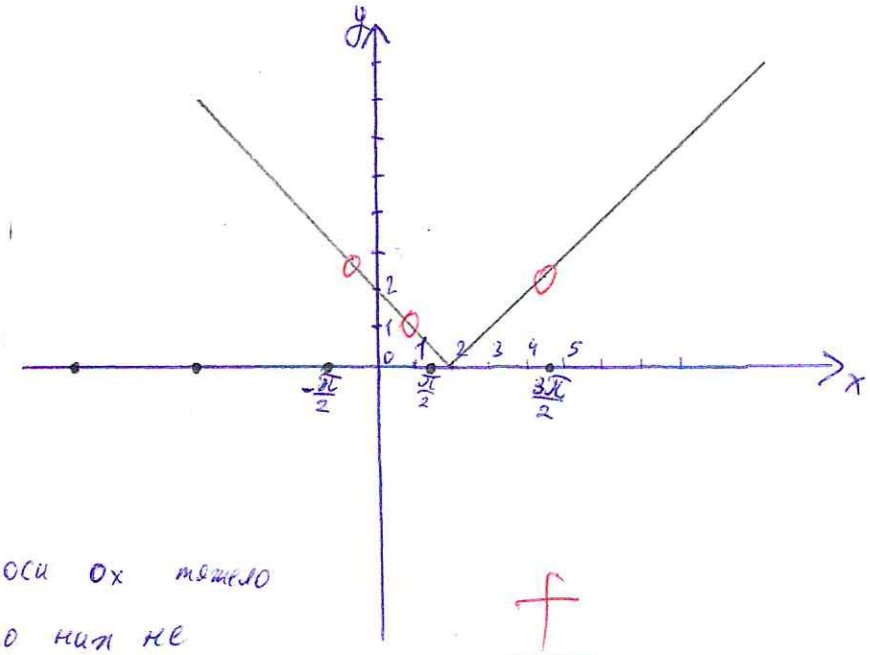
$1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\begin{cases} y=0 \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} y = |x-2| \\ y \geq 0 \\ \text{график симметричен отн-но прямой } x=2 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$



Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ на оси Ox тяжело отметить, но мы про них не забываем

f

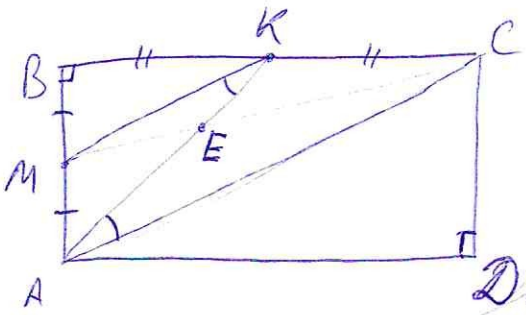
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 4 8 6 7

№4



Дано: ABCD-прямоугольник; AM=MB; BK=KC

Сравнить: S_{MBKE} и S_{AECD}

Д.п.: AC; MK.

Решение:

1) $\triangle ABC$-п
AM=MB
BK=KC (по усл.) $\Rightarrow$ MK-средняя линия $\Rightarrow \begin{cases} MK \parallel AC \\ MK=\frac{1}{2}AC \end{cases}$

2) MK ∥ AC
AK-секущая $\Rightarrow \angle MKA=\angle KAC$ (накрест лежащие) $\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle KBM$ по 2-м углам ($\angle MEK=\angle AEC$)

3) $\triangle MEK \sim \triangle CEA$ (по доказанному)
$MK=\frac{1}{2}AC$ (по найденному) $\Rightarrow$ коэффициент подобия $k=\frac{1}{2}$

3) $\triangle MEK \sim \triangle CEA$
$k=\frac{1}{2}$ (по найденному)
известно, что площади подобных треугольников ~~фигур~~ относятся как коэффициент подобия в квадрате $\Rightarrow \frac{S_{MKE}}{S_{CAE}}=k^2=\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{CAE}=4\cdot S_{MKE}$.

4) $\triangle MBK$-прямоуг. $\Rightarrow S_{MBK}=\frac{1}{2}MB\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\cdot CD\cdot AD=\frac{1}{4}\cdot S_{ACD} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ACD}=4\cdot S_{MBK}$.

5) $S_{MBKE}=S_{MBK}+S_{MKE}$
$S_{AECD}=S_{AEC}+S_{ACD}$
$S_{ACD}=4\cdot S_{MBK}$
$S_{CAE}=4\cdot S_{MEK}$ (по найденному) $\Rightarrow S_{AECD}=4\cdot S_{MBK}+4\cdot S_{MEK}=4\cdot S_{MBKE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}}=\frac{1}{4}$

Ответ: S_{MBKE} в 4 раза меньше, чем S_{AECD}

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 4 8 6 7

№3

$\begin{cases} x+y=a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2=(a+1)^2 \\ xy=a^2-7a+16 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+2xy=a^2+2a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \end{cases}$

Подставим $xy=a^2-7a+16$ в 1 уравнение системы

$x^2+y^2+2(a^2-7a+16)=a^2+2a+1$

$x^2+y^2=\cancel{9}=-a^2+16a-31$ ~~Решим уравнение от-но a~~ ~~Построим~~

~~$-a^2+16a-31=0$~~

$f(a)=-a^2+16a-31$

график этой функции - парабола. Найдем ее вершину.] она имеет координаты $(x_в; y_в)$

$x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-16}{2(-1)}=8$

$y_в=f(8)=-64+128-31=33$

Т.к. ветви этой параболы направлены вниз, то вершина - это макси. который только достигается.

Из всего этого следует, что $-a^2+16a-31\leq 33 \Longrightarrow x^2+y^2\leq 33$

а значение 33 $f(a)$ принимает при $a=8$.

Ответ: $a=8$.

$a=8$ Нет решения

F