ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 4 3 2

Класс 9 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	10	30					85	восемьдесят пять	

Задание 1

$A=\sqrt{2013\cdot2015\cdot2017\cdot2019+16}=\sqrt{(2016-3)(2016-1)(2016+1)(2016+3)+16}=$

$=\sqrt{(2016^2-9)(2016^2-1)+16}=\sqrt{((2016^2-5)-4)((2016^2-5)+4)+16}=$

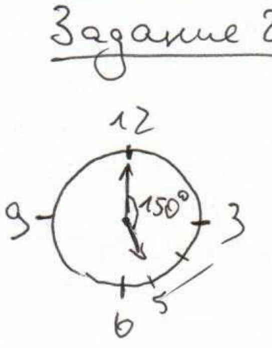
$=\sqrt{(2016^2-5)^2-16+16}=\sqrt{(2016^2-5)^2}=2016^2-5$ +

$$\begin{array}{r} 2016 \\ \times\ 2016 \\ \hline 12096 \\ +\ 2016 \\ 0000 \\ 4032 \\ \hline 4064256 \end{array}$$

т.е. $A=4064251$

Ответ: 4064251 + 5

Задание 2



Угол между минутной и часовой стрелкой равен $180°-\frac{1}{6}\cdot180°=150°$

Скорость минутной стрелки равна $\frac{360°}{60}=6°/\text{мин}$

Скорость часовой равна $\frac{360°}{12}=30°/\text{час}=0{,}5°/\text{мин}$

Получается, что минутная стрелка догоняет часовую со скоростью

$V_{\text{сбл.}}=V_{\text{мин.}}-V_{\text{час.}}=5{,}5°/\text{мин}$

10

Найдём время, за которое она это сделает

$t=\frac{150°}{5{,}5°/\text{мин}}=\frac{300}{11}=27\frac{3}{11}$ минут

Ответ: через $27\frac{3}{11}$ минут +

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 0 | 4 | 3 | 2 |

Задание 3

От противного:

Пусть $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ имеет решения.

Тогда представим в виде $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0$, где x_1, x_2, x_3, x_4 - решения, которые могут совпадать.

Раскроем скобки, и вынесем общие множители $x^4, x^3, x^2, x, 1$:

$$x^4+x^3(-x_4-x_3-x_2-x_1)+x^2(x_3x_4+x_2x_4+x_2x_3+x_1x_4+x_1x_3+x_1x_2)+$$
$$+x(-x_2x_3x_4-x_1x_3x_4-x_1x_2x_4-x_1x_2x_3)+x_1x_2x_3x_4=0$$

Получим систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4 & (1)\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=12 & (2)\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=24 & (3)\\ x_1x_2x_3x_4=24 & (4)\end{cases}$$

Выразим (3) через (4):

$$\frac{24}{x_4}+\frac{24}{x_3}+\frac{24}{x_2}+\frac{24}{x_1}=24$$

$$24\left(\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}\right)=24$$

$$\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=1$$

$$\frac{1}{x_1}=1-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}$$

$$\frac{1}{x_1}=1-\frac{x_3x_4+x_2x_4+x_2x_3}{x_2x_3x_4}$$

Выразим числитель через (2):

$$\frac{1}{x_1}=1-\frac{12-(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4)}{x_2x_3x_4}$$

$$\frac{1}{x_1}=1-\frac{12-x_1(x_2+x_3+x_4)}{x_2x_3x_4}$$

Выразим числитель через (1) и знаменатель через (4):

$$\frac{1}{x_1}=1-\frac{12-x_1(4-x_1)}{\left(\frac{24}{x_1}\right)}$$

$$\frac{1}{x_1}=1-\frac{12x_1-x_1^2(4-x_1)}{24}$$

$$\frac{1}{x_1}=\frac{24+x_1^2(4-x_1)-12x_1}{24}$$

$$\frac{24x_1+x_1^3(4-x_1)-12x_1^2-24}{24x_1}=0$$

$$\frac{x_1^4-4x_1^3+12x_1^2-24x_1+24}{24x_1}=0$$

По уравн. (4) $x_1\neq0$

$\Rightarrow x_1^4-4x_1^3+12x_1^2-24x_1+24=0$

т.е. $x_1=x$?

проведём аналогичные действия для x_2, x_3, x_4 и получим, что

$x=x_1=x_2=x_3=x_4$?

Подставим в (1):

$4x_1=4$

$x_1=1=x_2=x_3=x_4$

Получим противоречие по (4)

т.е. решений нет

10

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 4 3 2

Задание 4

Обозначим кол-во всех мальчиков за m и кол-во всех девочек за d

Получим уравнение: (Предпочтение электронных книг)

$0,477(m+d)=0,33m+0,63d$

$0,477m+0,477d=0,33m+0,63d \quad |\cdot 1000$

$477m+477d=330m+630d$

$147m=153d$

$d=\frac{147}{153}m$ +

Составим уравнение по предпочтению бумажных книг:
(x - процент девочек, предпочитающих книги в бумажном формате):

$0,151(m+d)=0,2m+xd \quad |\cdot 1000$

$151(m+d)=200m+1000xd$ +

$151\cdot\underbrace{\left(m+\frac{147}{153}m\right)}_{\frac{300}{153}m}=200m+1000x\cdot\frac{147}{153}m \quad |\cdot 153$

$151\cdot 300m=30600m+147000mx$

$45300m=30600m+147000mx$

$147000mx=14700m$ +

$x=0,1$

Ответ: 10% +

20

Задание 5

$\begin{cases}x+y=a+1 & |\wedge 2 \text{ (возведём в квадрат)}\\ xy=a^2-7a+16 & |\cdot 2\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=a^2+2a+1\\ 2xy=2a^2-14a+32\end{cases}$ $\ominus$

$x^2+y^2=-a^2+16a-31$

$x^2+y^2=-(a^2-16a+64)+33$

$x^2+y^2=-(a-8)^2+33$

так как квадрат числа неотрицателен, то

$(a-8)^2\geq 0$; $-(a-8)^2\leq 0 \Rightarrow x^2+y^2=-(a-8)^2+33\leq 33$,

Причём равенство достигается при $a=8$

Ответ: при $a=8$, x^2+y^2 принимает своё максимальное значение (33).

∃ корней?

10

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

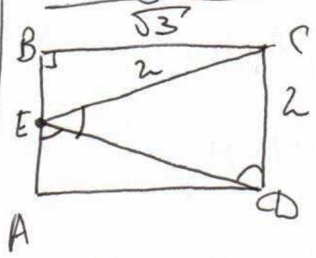
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 0 4 3 2

Задание 6

Дано: ABCD - прям-к
AB = 2 = CD
$BC = \sqrt{3} = AD$
E ∈ прямой AB
∠AED = ∠DEC
Найти: AE = ?

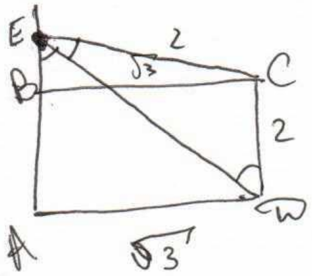
Решение:
I случай (E лежит на отрезке AB):



∠AED = ∠EDC как накр. леж. при AB||CD и секущей ED +
т.е. △ECD − р/б (EC = CD = 2)
По т. Пифагора в △BCE:
$EC^2 = BC^2 + BE^2$
$BE = \sqrt{EC^2 - BC^2} = \sqrt{4-3} = 1$
т.е. AE = AB − BE = 2 − 1 = 1 +

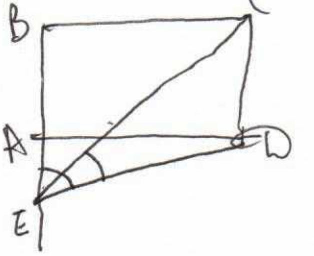
II случай (E лежит на ~~отрезке~~ прямой AB за точкой B):

∠AED = ∠EDC как накрест лежащие при AE||CD и сек. ED
т.е. △ECD − р/б (EC = CD = 2)



По т. Пифагора в △ECB:
$BE = \sqrt{EC^2 - BC^2} = \sqrt{4-3} = 1$
AE = AB + BE = 2 + 1 = 3 +

III случай (E лежит на прямой BA за точкой A):



Если ∠AED = ∠CED (т.е. ∠BED = ∠CED), то
B ≡ C (т.е. BC = 0), а т.к. $BC = \sqrt{3} \neq 0$, то
данный случай невозможен +

Ответ: AE = {3; 1}

30