ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 3 1 0 2

Класс 10 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 9.02.19

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	15	15	5					60	шестьдесят	Кш

Задание 3.

$$\begin{cases} x+y = a+1 & \text{/ возведём в квадрат} \\ xy = a^2-7a+16 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} x^2+2xy+y^2 = (a+1)^2 \\ 2xy = 2a^2-14a+32 \end{cases}$$

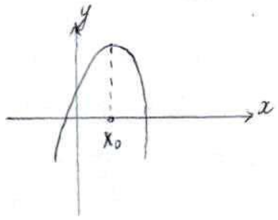
$x^2+y^2 = (a+1)^2 - 2a^2 + 14a - 32$

$x^2+y^2 = a^2+2a+1-2a^2+14a-32$

$x^2+y^2 = -a^2+16a-31$

10

$-a^2+16a-31$ – тк. коэффициент при $a^2 < 0$, то это парабола ветвями вниз $\Rightarrow$ максимум достигается в вершине параболы x_0

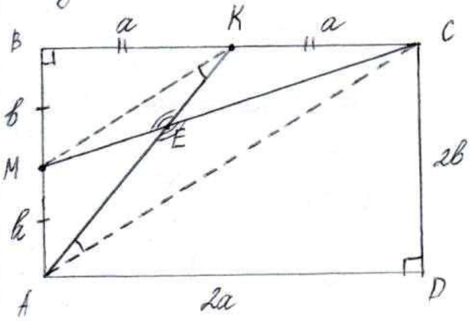


$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-16}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-16}{-2} = 8$

$D \geqslant 0 \Rightarrow a = 7$!

Ответ: при $a = 8$

Задание 4.



Дано:

ABCD – прямоугольник

$BK = KC$

$AM = MB$

$AK \cap CM = E$

Сравнить:

S_{MBKE}

S_{AECD}

Решение:

1. Достроим отрезки: AC, MK

2. $\measuredangle$ $\triangle ABC$:

 1) $AM = MB$ $\Rightarrow$ MK – средняя линия $\triangle ABC$

 2) $BK = KC$

По свойству средней линии $MK = 0{,}5AC$, $MK \parallel AC$

3. Пусть $AM = MB = b$, $BK = KC = a$, тогда $AD = 2a$, $CD = 2b$

$S_{AECD} = S_{ACD} + S_{AEC}$ $\quad S_{ACD} = \dfrac{2a\cdot 2b}{2} = \dfrac{4ab}{2} = 2ab$ $\quad S_{MBK} = \dfrac{ab}{2}$

$S_{MBKE} = S_{MBK} + S_{MKE}$

ШИФР 3 3 1 0 2

4. $\triangle MEK \sim \triangle AEC$ по 2м углам:
   1. $\angle MKE = \angle KAC$ как накрест лежащие, при $MK \parallel AC$ (пункт 2), секущей AK
   2. $\angle AEC = \angle MEK$ как вертикальные

$k = \dfrac{MK}{AC}$

5. По теореме Пифагора:

$MK = \sqrt{a^2+b^2}$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{1}{2}$

$AC = \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$

Так как площади подобных $\triangle$ относятся как k^2, то

$\dfrac{S_{MEK}}{S_{AEC}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{AEC} = 4S_{MEK}$

6. $S_{AECD} = 2ab + S_{AEC} = 2ab + 4S_{MEK}$

$S_{MBKE} = 0.5ab + S_{MEK}$

15

$S_{AECD} > S_{MBKE}$, так как

$\dfrac{S_{AECD}}{S_{MBKE}} = \dfrac{2ab + 4S_{MEK}}{0.5ab + S_{MEK}} = \dfrac{4(0.5ab + S_{MEK})}{0.5ab + S_{MEK}} = 4$

Ответ: S_{AECD} в 4 раза больше S_{MBKE}

Задание № 5.

$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+tg^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$

1. $|\sin x| \le 1$, $\sin^2 x \le 1$ $\Rightarrow 1-\sin^2 x \ge 0$ при $x \in (-\infty;+\infty)$
2. $\underset{>0}{1} + \underset{\ge 0}{tg^2 x} > 0$ при $x \in (-\infty;+\infty)$
3. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \ge 0$

ОДЗ: $x \in (-\infty;+\infty)$?

$\cos x \ne 0$!

1. По основному тригонометрическому тождеству:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1-\sin^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$

2. По формулам приведения:

$1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{1+tg^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$

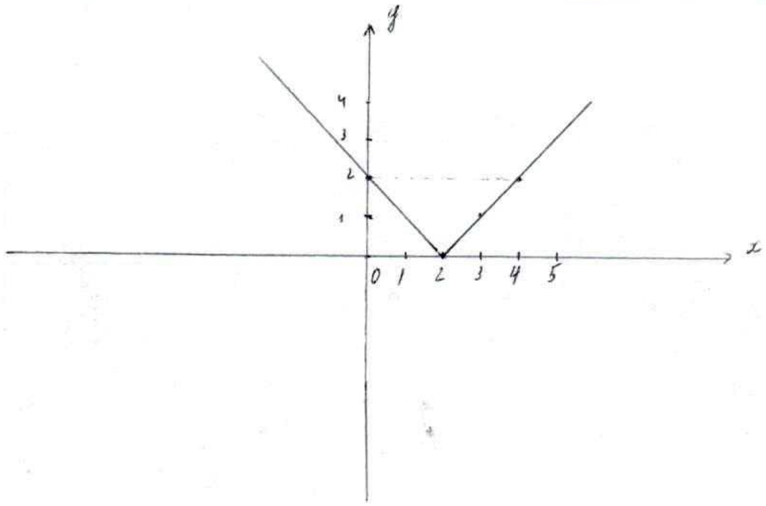
3. $y = \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

Это функция $|x|$ сдвинутая на 2 вправо

$x=$	0	1	2	3	4
$y=$	2	1	0	1	2

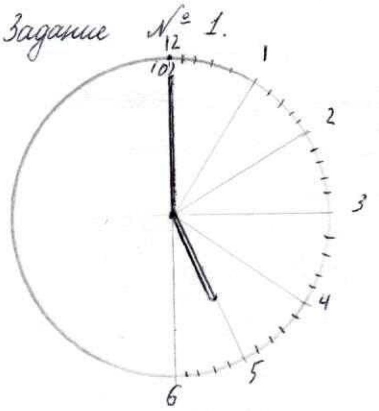
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 3 | 3 | 1 | 0 | 2 |



15

Задание № 1.



Скорость минутной стрелки
1 дел / мин
Скорость часовой стрелки:
за 60 мин – 5 дел $\Rightarrow$ скорость $= \frac{5}{60}$ дел / с $= \frac{1}{12}$ дел / с
Пусть x мин – время, через которое минутная стрелка догонит часовую, тогда:

5

$0 + 1\cdot x = 25 + \frac{1}{12}x \quad / \cdot 12$

$12x = 300 + x$

$11x = 300$

$x = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$

Ответ: через $27\frac{3}{11}$ минут

Задание № 2.

Так как $A, B > 0$, то можно сравнить квадраты чисел:

$2018 + 2\sqrt{2018\cdot 2029} + 2020 \vee 4\cdot 2019$

$1009 + \sqrt{2018\cdot 2020} + 1010 \vee 2\cdot 2019$

10

$2019 + \sqrt{2018\cdot 2020} \vee 2\cdot 2019$

$\sqrt{2018\cdot 2020} \vee 2019$

$\sqrt{4'076'360} \vee \sqrt{4'076'361} \Rightarrow$

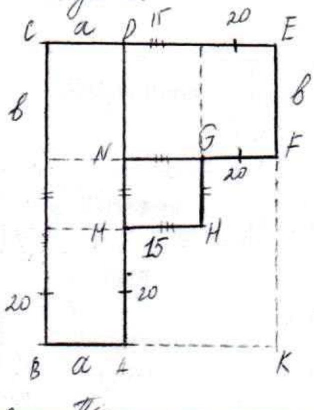
$A < B$

Ответ: $A = \sqrt{2018} + \sqrt{2020} < B = 2\sqrt{2019}$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 3 1 0 2

Задание № 6.



Пусть: $AB = a$, $EF = b$, тогда

1. $S = S_{ABCD} + S_{DEFN} + S_{MNGH} =$
$a\cdot(20+GH+b) + 35\cdot b + 15\cdot GH = 1600\,м^2$

$P = a + 20 + GH + b + a + 15 + 20 + b + 20 + GH + 15 + 20$
$= 2a + 2b + 2GH + 90$

Дано:
ABCD-прямоугольник
DNFE-прямоугольник
MNGH-прямоугольник
$MA = GF = 20\,м$
$MH = 15\,м$
$GH \geq 10\,м$
$S = 1600\,м^2$
Найти:
P_{min} - ?
BK - ?
KE - ?
GH - ?

~~2. Предположим, что GH = 10, тогда~~

$\cancel{S = a(30+b) + 35b + 150 = 1600\,м^2}$

$\cancel{S = 30a + ab + 35b + 150 = 1600}$

$\cancel{a = \frac{1600 - 150 - 35b}{30+b} = \frac{1450 - 35b}{30+b}}$

2. Выразим a из площади:

$$a = \frac{1600 - 15GH - 35b}{20 + GH + b}$$

5

При увеличении GH на 1 делитель уменьшается на 15, а знаменатель увеличивается на 1. Пусть наш делитель $1600 - 15GH - 35b = x$, а знаменатель $20 + GH + b = y$.

Чтобы наш периметр уменьшался, при $b = const$, при увеличении GH на 1, a должно уменьшаться больше, чем на 1. , $x, y > 0$

То есть при увеличении GH на t, $t > 0$

$$\frac{x}{y} - \frac{x - 15\cdot t}{y + t\cdot 1} > 1$$

$$\frac{x(y+t) - (x - 15t)y}{y(y+t)} > 1$$

$$\frac{xy + xt - xy + 15ty}{y^2 + ty} > 1$$

$$\frac{xt + 15ty}{y^2 + ty} > 1$$

$$xt + 15ty > y^2 + ty$$

$$xt > y^2 - 14ty$$

$\Rightarrow$ из этого следует, что P_{min} будет достигаться при $GH_{min} = 10$, тогда

$$a = \frac{1600 - 150 - 35b}{30+b} = \frac{1450 - 35b}{30+b}$$

Тогда $S = \frac{1450 - 35b\,(30+b)}{30+b} + 35b + 150 = 1600$

$$S = \frac{1450 - 105b - 35b^2}{30+b} + 35b + 150 - 1600 = 0$$

?