ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 0 5 9

Класс 10 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания МГТУ имени Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	15	5					~~70~~ 65	~~семьдесят~~ шестьдесят пять	Кенг-

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 0 5 9

N 1

Дано:

На часах стрелки показывают 5 часов.

Когда мин. стрелка догонит часовую – ?

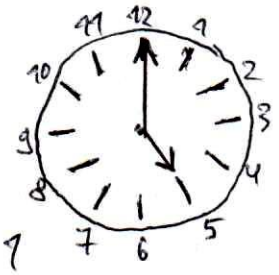


рис. 1

За 1 час мин. стрелка совершает 1 оборот по циферблату.

$$v_м = \frac{S}{t} = \frac{1}{1} = 1$$ – скорость мин. стрелки.

За 1 час час. стрелка совершает $\frac{1}{12}$ оборота по циферблату; т.к. проходит $\frac{1}{12}$ часть его.

$$v_ч = \frac{1:12}{1} = \frac{1}{12}.$$

5

На данный момент между мин. стрелкой и час. стрелкой $\frac{5}{12}$ оборота; т.к. мин. стрелка на (12), а час. стрелка на (5) см. рис. 1

стрелки двигаются в одну сторону (по часовой) $\Rightarrow v_{сближ.} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

$$S = \frac{5}{12}$$

$$\frac{S}{v_{сближ.}} = t_{сближ.} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{11}{12}} = \frac{5}{11} \text{ ч.}$$

Ответ: $\frac{5}{11}$ ч.

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 0 5 9

№ 2

Дано:

$A = \sqrt{2018} + \sqrt{2020}$

$B = 2\sqrt{2019}$

Сравнить A и B

A и B

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020}$ и $2\sqrt{2019}$.

Пусть $x = 2019$

⇓

Сравниваем $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ и $2\sqrt{x}$

Т.к. $x > 0$ можно возвести в квадрат.

$x - 1 + x + 1 + 2\sqrt{(x-1)(x+1)}$ $\quad 4x$.

$2\sqrt{(x-1)(x+1)}$ $\quad 2x \quad | : 2$

$\sqrt{(x-1)(x+1)}$ $\quad x$.

$\sqrt{x^2-1}$ $\quad x$. возводим в квадрат.

$x^2 - 1 \quad x^2$

$-1 < 0 \Rightarrow A < B$

10

Ответ: $A < B$

№3

Дано:

$\begin{cases} x+y = a+1 \\ xy = a^2-7a+16 \end{cases}$

а такое, что x^2+y^2 – наибольшее знач.

$a-?$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy. \\ x+y = a+1 \\ xy = a^2-7a+16 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = \underbrace{(a+1)^2-2(a^2-7a+16)}$

Доп. это выражение.

$(a+1)^2-2(a^2-7a+16) = a^2+2a+1-2a^2+14a-32 =$

$= -a^2+16a-31.$

$f(a) = -a^2+16a-31$ – график парабола ветви вниз.

⇓

наибольшее знач. – вершина пар.

$a_в = -\frac{b}{2a} = \frac{-16}{-2} = 8.$

$a = 8.$

Ответ: 8

$x, y \in R$!

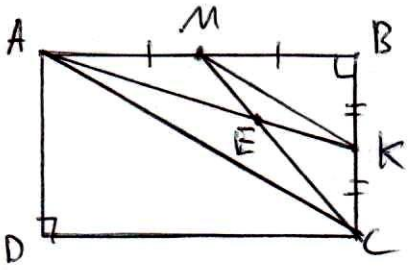
Я 7 10

10

N 4

Дано:

ABCD – прямоугол.
$M \in AB$; $K \in BC$.
$AM = MB$
$BK = KC$
$E \in AK$; $E \in CM$



Сравнить S_{MBKE} и S_{AECD}

Решение.

Пусть $S_{ABCD} = S$

$S_{AECD} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle AEC}$

$S_{MBKE} = S_{\triangle MBK} + S_{\triangle MKE}$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S$

Рассм. $\triangle ABC$.
$AM = MB$; $BK = KC \Rightarrow MK$ – ср. линия.

$\triangle ABC \sim \triangle MBK$ т.к. $\angle B$ – общ.; $\frac{MB}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBK}} = \frac{4}{1}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S \Rightarrow S_{\triangle MBK} = \frac{S_{\triangle ABC}}{4} = \frac{1}{8} S$.

CM – мед. в $\triangle ABC$; AK – мед. в $\triangle ABC$.

$\frac{AE}{EK} = \frac{CE}{EM} = \frac{2}{1}$ по св. мед.; а $S_{\triangle MBC} = S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ABK} = S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

Зам. $\triangle AEC$ и $\triangle MEK$.
$\angle AEC = \angle MEK$ т.к. верт.; $\frac{AE}{EK} = \frac{CE}{EM} \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle MKE$

$\frac{S_{\triangle MKE}}{S_{\triangle AEC}} = \left(\frac{ME}{EC}\right)^2 = \frac{1}{4}$; Пусть $S_{AEC} = 4x$; $S_{MKE} = x$

$S_{\triangle AMC} = S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} S$.

№4 (продолжение)

$S_{\triangle AME} + S_{\triangle AEC} = S_{\triangle AME} + S_{\triangle AMK} + S_{\triangle MBK}$.

$4x = x + \frac{1}{8}S$

$3x = \frac{1}{8}S$

$x = \frac{1}{24}S \Rightarrow S_{\triangle AEC} = \frac{1}{6}S$; $S_{\triangle MKE} = \frac{1}{24}S$.

$S_{AECD} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{6}S = \frac{4}{6}S$

$S_{MBKE} = \frac{1}{8}S + \frac{1}{24}S = \frac{1}{6}S$.

$S_{AECD} > S_{MBKE}$ $\frac{S_{AECD}}{S_{MBKE}} = \frac{4}{1}$.

20

Ответ: $S_{AECD} > S_{MBKE}$.

№5

Дано:

$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$

График $f(y)$ – ?

$y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot \sqrt{(x-2)^2}$

$y = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot |x-2|$

$y = |\cos x| \cdot \left|\frac{1}{\cos x}\right| \cdot |x-2|$

$y = |x-2|$

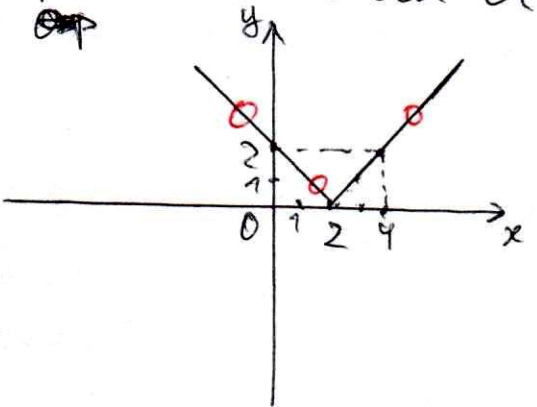
$\cos x \neq 0$

15

$y = x$ – мин. ф.

$y = x-2$ – сдвиг на 2 вправо по оси OX.

$y = |x-2|$ – зеркальное отображение по оси OX.



Ответ:

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 0 5 9

№6

Дано:

рис.

ABCEFGHM – многоугол.

ABCD; DEFN; NGHM – прямоугол.

MA = GF = 20м.

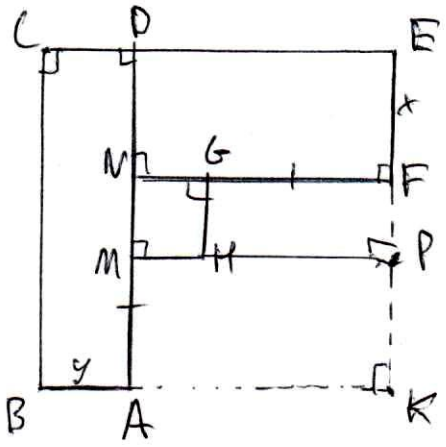
MH = 15м.

$GH \geq 10$м.; $S_{ABCEFGHM} = 7600$м^2

$P_{ABCEFGHM}$ – наименьш.

$P_{ABCEFGHM}$ – ?

BK; KE; GH – ?



Решение.

$P_{ABCDEFGHM} = AB + BC + CD + DE + EF + NE + GH + HM + MA$

Пусть $BA = y = CD$ т.к. ABCD – прямоугол.

Пусть $EF = DN = x$ т.к. DEFN – прямоугол.

$MA + MH + NP = CB$; $DE = MH + GF$; $CE = BA + DE$

$2(y + 15 + 20 + x + GH + 20) = P_{ABCDEFGHM} = P$

$P = 2(y + x + GH + 55)$

$x \cdot DE + y \cdot CB + MH \cdot GH = 7600$м. $= S_{ABCDEFGHM} = S$.

$35x + y(x + GH + 20) + GH \cdot 15 = 7600$

$BK = y + 35$

$EK = x + GH + 20$.

Пусть $MP \perp EK$.

$S_{MPKA} = MA \cdot MP$ т.к. прямоугол. $= 35 \cdot 20 = 700$.

$S_{GFPH} = 20 \cdot GH$.

$BK \cdot EK = 7600 + 700 + 20GH = (y + 35)(x + GH + 20)$

$7600 = 35x + y(x + GH + 20) + GH \cdot 15$

$700 + 20GH = 700 + 20GH$.

5

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 0 5 9

№ 6 (продолжение)

$$\begin{cases} 1600 = 35x + y(x + 6H + 20) + 6H \cdot 15 \\ P = 2(y + x + 6H + 55) \end{cases}$$

?