ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 3 3

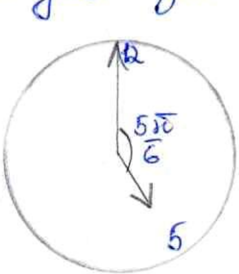
Класс 10 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	20	15					80	восемьдесят	Кипр

Задание №1.

За 1 час часовая стрелка проходит $\frac{1}{12}$ круга, т.е. угол $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$ радиан. Тогда за 1 минуту эта же стрелка пройдёт $\frac{\pi}{6}:60=\frac{\pi}{360}$ радиан.



При этом ровно в 5 часов часовая стрелка отстоит от минутной на $5\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$ радиан. За 1 минуту минутная стрелка проходит угол $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$ радиан. Обозначим искомое время в минутах за t. Тогда

$\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{360}\cdot t=t\cdot\frac{\pi}{30}$; $\frac{11t}{360}=\frac{5}{6}$; $t=\frac{300}{11}$ минут или $t=27\frac{3}{11}$ минуты.

5

Ответ: через $27\frac{3}{11}$ минуты.

Задание №2.

Т.к. числа A и B положительны, то воспользуемся свойством, что при $A>0$ и $B>0$, если $A^2>B^2$, то $A>B$. $A^2=2018+2\sqrt{2018+2020}+2020$

$B^2=4\cdot2019$. Рассмотрим разность $A^2-B^2=4038+2\sqrt{2018\cdot2020}-$

$-(2\cdot2019+4038)=2(\sqrt{2018\cdot2020}-2019)$. Сравним числа $\sqrt{2018\cdot2020}$ и 2019; $2019=\sqrt{2019^2}=\sqrt{4076361}$; $\sqrt{2018\cdot2020}=\sqrt{4076360}$;

$$\begin{array}{r} 2019\\ \times 2019\\ \hline 18171\\ +2019\\ 4038\\ \hline 4076361 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2018\\ \times 2020\\ \hline 0000\\ +4036\\ 4036\\ \hline 4076360 \end{array}$$

$4076360<4076361 \Rightarrow \sqrt{4076360}<\sqrt{4076361} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2018\cdot2020}<2019 \Rightarrow \sqrt{2018\cdot2020}-2019<0$, т.е. $A^2-B^2<0$ и $A^2<B^2$, из чего делаем вывод, что $B>A$.

10

Ответ: $A<B$.

Задание №3.

$\begin{cases} x+y=a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \end{cases}$ Представим выражение x^2+y^2, как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, где, используя ур-ние системы, имеем $(x+y)^2=(a+1)^2$; $-2xy=-2(a^2-7a+16)$, тогда

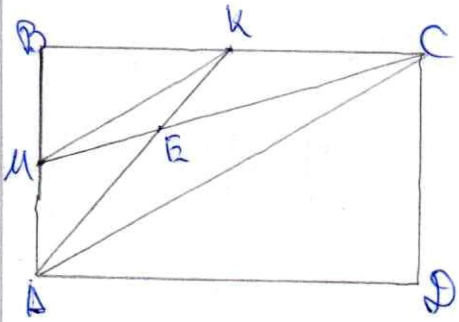
$x^2+y^2=(a+1)^2-2(a^2-7a+16)=a^2+2a+1-2a^2+14a-32=$ 10
$=-a^2+16a-31$

Рассмотрим ф-цию $f(a)=-a^2+16a-31$. Графиком ф-ции является парабола, „ветви" которой направлены вниз. Наибольшее значение данная ф-ция принимает в точке вершины параболы, $a_в=\frac{-16}{-2}=8$. Таким образом, т.к. значения выражения x^2+y^2 совпадает со значениями ф-ции $f(a)$ при различных a, то наибольшее значение x^2+y^2 принимает, также как и ф-ция, при $a=8$.

$D \geq 0 \Rightarrow a=7!$

Ответ: $a=8$.

Задание №4.



Дано: M – середина BA, K – середина BC, $AK \cap CM=E$.
Найти: $S_{MBKE} \vee S_{AECD}$ – ?
Запишем площади 4-х угольников как сумма площадей $\triangle$-ков; $S_{EMBK}=S_{MBK}+S_{MEK}$;
$S_{AECD}=S_{AEC}+S_{ADC}$. 1) По св-ву прямоугольника $CD=AB$; $BC=AD$; тогда $BK=\frac{1}{2}BC$ (по условию) $=\frac{1}{2}AD$; $BM=\frac{1}{2}BA$ (по условию) $=\frac{1}{2}CD$; $S_{ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC$, т.к. $\angle ADC=90°$ (по св-ву прямоугольника). Аналогично $\angle MBK=90° \Rightarrow S_{MBK}=\frac{1}{2}MB\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}AD\cdot\frac{1}{2}CD)=\frac{1}{4}S_{ADC}$ или $S_{ADC}=4S_{MBK}$.

2) По теореме Менелая в $\triangle BCA$ и KA секущей $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CE}{EM}\cdot\frac{MA}{AB}=1$, где $BK=\frac{1}{2}BC=KC$; $MA=\frac{1}{2}AB$, т.е. $\frac{CE}{EM}=2$ или $CE=2EM$.
3) Аналогично п. 3 по т. Менелая в $\triangle ABK$ и MC секущей $\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AE}{EK}\cdot\frac{CK}{BC}=1$, откуда $\frac{AE}{EK}=2$ или $AE=2EK$.

ШИФР 4 1 2 3 3

4) $\angle MEK = \angle AEC$ как вертикальные $\Rightarrow \sin\angle MEK = \sin\angle AEC$.
$S_{MEK} = \frac{1}{2}\cdot\sin\angle MEK\cdot ME\cdot EK$; $S_{AEC} = \frac{1}{2}\cdot\sin\angle AEC\cdot AE\cdot EC$.
Но из пунктов 2 и 3 $\Rightarrow$, что $AE = 2EK$, $CE = 2EM$, т.е. $S_{AEC} =$
$= \frac{1}{2}\cdot\sin\angle MEK\cdot 4EM\cdot EK = 4S_{MEK}$.
5) Получим, что $S_{AECD} = S_{AEC} + S_{ADC} = 4S_{MEK} + 4S_{MBK} =$
$= 4(S_{MEK} + S_{MBK}) = 4S_{MBKE}$. или $\frac{S_{AECD}}{S_{MBKE}} = 4$.

20

Ответ: S_{AECD} в 4 раза больше S_{MBKE}.

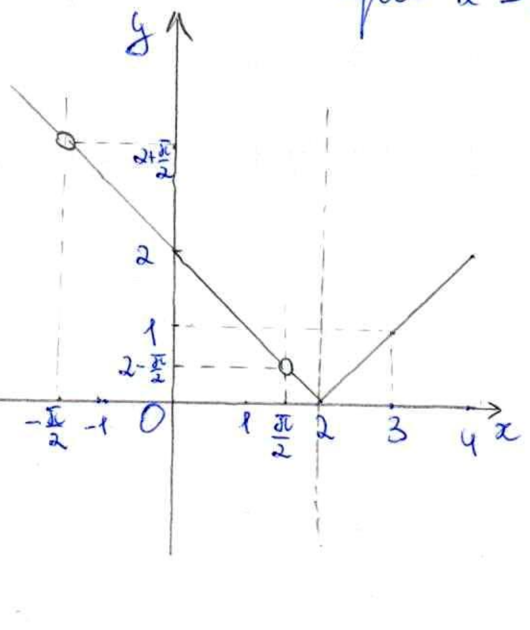
Задание № 5.

$y = \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+tg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-4x+4}$;
$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$;
$\sqrt{1+tg^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \left|\frac{1}{\cos x}\right|$, где $\cos x \neq 0$ или $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.
$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$. Подставив преобразованные значения, получ

$y = \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+tg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-4x+4} = |\cos x|\cdot\frac{1}{|\cos x|}\cdot|x-2| = |x-2|$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

x	2	3	1	0	4
y	0	1	1	2	2

График ф-ции $y = |x-2|$ получен из графика прямой $y = x-2$ симметричным отражением относительно прямой $x=2$ части графика при $x > 2$.



На графике все точки, где $x = \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ „выколоты"

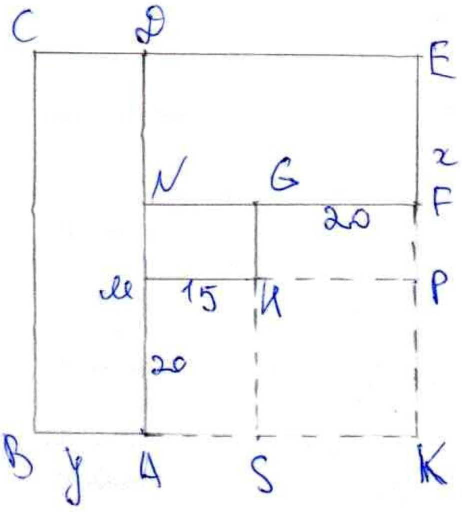
20

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 3 3



Задание №6.

Проведём MH до пересечения с EK в т. P. Аналогично GH до пересечения с AK в т. S. GFPH — прямоугольник ⇒ FP = GH, аналогично PK = HS; AS = MH, SK = HP = GF. Тогда искомый периметр равен периметру прямоугольника BCEK.

15

Обозначим EF за x, BA за y. Тогда $S = 15\cdot GH + x\cdot 35 + y\cdot(20+x+GH)$, а периметр $P = 2(y+35) + 2\cdot(x+20+GH)$. Из этих ур-ний следует, что стороны x и y ~~любые~~ обратно пропорциональны значению GH, тогда площадь прямоугольника $S_{BCEK} = (y+35)\cdot(20+x+GH)$ остаётся неизменной, а минимальный периметр достигается при $GH = 10$ (минимальном значении). Т.к. $S_{BCEK} = const$, то минимальный периметр будет при равных сторонах, т.е. когда BCEK — квадрат. Получим систему ур-ний.

Док-во?

$$\begin{cases} 1600 = (30+x)\cdot y + 35x + 15\cdot 10 \\ 30+x = 35+y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x-5 \\ (30+x)\cdot(x-5) + 35x = 1450. \end{cases}$$

$x^2 + 60x - 1600 = 0$ $\quad \frac{D}{4} = 900 + 1600 = 2500.$ $\quad x = -30 + 50 = 20.$

Тогда $EK = x + 30 = 50 = BK$. $S_{BCEK} = 2500$, а $P = 2\cdot(50+50) = 200$.

Ответ: $P = 200$; $BK = KE = 50$; $GH = 10$.