ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

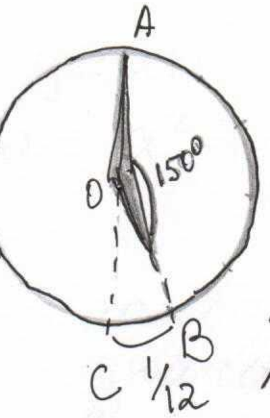
ШИФР 4 1 7 4 7

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания МГТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	20	15					80	восемьдесят	[illegible]

Задание 1.



1) Найдем угол между минутной и часовой стрелкой в начале:

$\angle AOB = 180^0 - \angle BOC$ $180^0 - \frac{1}{12}\cdot 360^0 = $
$= 150^0$.

2) Заметим, что минутная стрелка проворачивается за минуту на:

$\frac{360^0}{60} = 6^0$, а часовая: $\frac{360}{60}\cdot\frac{1}{12} = 0{,}5^0$ в мин.

3) Пусть время встречи стрелок равно t:
Тогда:

5

$150 = 6t - 0{,}5t$
$150 = 5{,}5t \Rightarrow t = \frac{150}{5{,}5} = 27\frac{3}{11}$ мин

Ответ: $27\frac{3}{11}$ мин.

Задание 2

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} \vee 2\sqrt{2019}$

$2\sqrt{2019} = 2\sqrt{\frac{2018+2020}{2}} = \sqrt{2(2018+2020)}$

Заметим, что для всех $x, y \geq 1$ справедливо

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)} \Rightarrow$ т.к. $2018 \neq 2019$

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} < 2\sqrt{2019}$.

Или можно доказать следующим образом:

Скорость возрастание функции $y=\sqrt{x}$ монотонно уменьшается $\Rightarrow$

$\sqrt{2019} - \sqrt{2018} > \sqrt{2020} - \sqrt{2019}$

$y_2 - y_1 > y_3 - y_2$, где $y_1 = \sqrt{x_1}$
$y_2 = \sqrt{x_2}$
$y_3 = \sqrt{x_3}$

10

$\Downarrow$

$\sqrt{2020} - \sqrt{2019} - (\sqrt{2019} - \sqrt{2018}) < 0 \Rightarrow$

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} < 2\sqrt{2019} \Rightarrow A < B$

Ответ: ~~$\sqrt{2018}$~~ $A < B$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 7 4 7

Задание 3

$$\begin{cases} x+y=a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \end{cases}$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=$$

18

$$=a^2+2a+1-2(a^2-7a+16)=$$

$$=-a^2+16a-31=\underbrace{-(a-8)^2}_{\leq 0}+33$$

=> наибольшее значение при $a=8$, т.е. когда $(a-8)^2$ минимально

Ответ: при $a=8$ Это! $a=7$

Задание №5

$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\,\sqrt{1+tg^2 x}\,\sqrt{x^2-4x+4}=$$

$$=\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}\sqrt{(x-2)^2}=\frac{\cos x}{\cos x}|x-2|=$$

$$=|x-2|$$

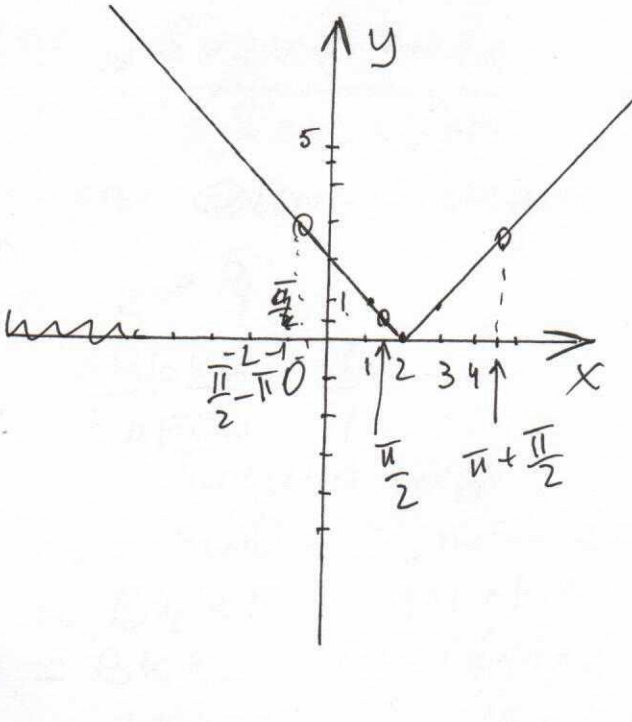
D_y

$\cos x\neq 0$

$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$y=|x-2|$ — получ. из гр. ф. $y=|x|$ смещ. по оси Ox на 2 ед. вправо.

x	1	2	3
y	1	0	1



20

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

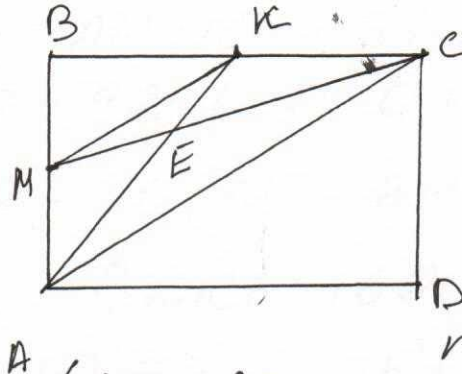
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 7 4 7

Задача 4

Дано
ABCD- прямоуг
K-сер. BC
M-сер AB
$AK \cap CM = E$
Найти
$\frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}}$



Решение.

1) $S_{AECD} = S_{ACD} + S_{AEC}$

$S_{MBKE} = S_{MBK} + S_{MEK}$

2) Рассм. $\triangle MBK$ и $\triangle ABC$

$\angle MBK$ - общий

$\angle BMK = \angle BAC$, (соотв при $MK \parallel AC$ и сек. AM)

($MK \parallel AC$ т.к. MK - ср. лин в $\triangle ABC$ по определ) $\Rightarrow$ $\triangle MBK \sim \triangle ABC$ (по I признак)

3) $\frac{MB}{AB} = \frac{MK}{KC} = k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$ (*).

4) Рассм. $\triangle MEK$ и $\triangle AEC$

$\angle MEK = \angle AEC$ (вертик.)

$\angle MKE = \angle KAC$ (накрест леж. при $MK \parallel AC$ и сек. AK)

$\Rightarrow \triangle MEK \sim \triangle AEC$ (по 2-м углам);

$k = \frac{MK}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{MEK}}{S_{AEC}} = k^2 = \frac{1}{4}$;

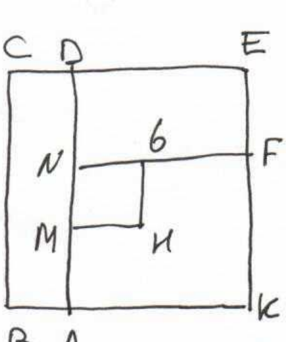
20

5) $\frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}} = \frac{S_{MBK} + S_{MEK}}{S_{ACD} + S_{AEC}} = \frac{\frac{1}{4}(S_{ACD} + S_{AEC})}{S_{ACD} + S_{AEC}} = \frac{1}{4}$

($S_{ACD} = S_{ABC}$ $\Leftrightarrow$ (симметрич. относ AC) $\Rightarrow$ $\frac{S_{ACD}}{S_{MBK}} = \frac{1}{k^2} = 4$;)

Ответ: $\frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}} = \frac{1}{4}$

Задача N6



$S_ф = 1600 = BKKE - ANNF + MNNG =$

$= BK \cdot KE - (AM + MN)(NG + GF) + MNNG =$

$= BKKE - \cancel{(AM+MN)}\, AM \cdot NG - AMGF - \cancel{MNNG}$

$- MNGF + \cancel{MNNG} = BKKE - \cancel{AMNG} - \cancel{AMGF} -$

$- AM(NF - GF + GF) - MNGF = BKKE - AM(NF$

$- MNGF = BKKE - AM(NF + GH) =$

$= BKKE - AM(MH + GF + GH)$;

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 7 4 7

№6 продолжение

$1600 = BKKE - AM(MH + GF + GH)$

$1600 = BKKE - 20(15+20+GH)$

$1600 = BKKE - 20(35 + GH)$;

$20(35 + GH) = BKKE - 1600$

Т.к. $GH \geq 10 \Rightarrow 35 + GH \geq 45 \Rightarrow$

$(GH+35)20 \geq 900$

$BKKE - 1600 \geq 900$.

$BKKE \geq 2500$. => наименьшая сумма чисел, произведение которых равно 2500 есть 100 => числа 50 и 50. почему?

15

~~Тогда $P = AB + BC + CE + EF + GH + MH + AM = 2BK + BKKE$~~ Заметим, что периметр равен $P = AB + BC + CE + EF + GH + MH + FG + AM = 2BK + 2KE$ (если спроецировать, то получим сумму сторон) $= P_{BCEK} = 50+50+50+50 = 200$.

(~~площад~~: Периметр квадрата будет не больше периметра прямоугольника с такой же площадью) => GH - не влияет.

Ответ: 200; 50; 50; $GH \in [0;30]$, допустим 25.