ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 4 | 0 | 5 | 4 |

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	15	0					60	шестьдесят	Кем

2.

$A \,?\, B$ $\sqrt{a} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$; $2\sqrt{c} \geq 0 \Rightarrow$

$\sqrt{2018}+\sqrt{2020} \,?\, 2\sqrt{2019}$ можем возвести обе части в

$2018+2\sqrt{2018\cdot 2020}+2020 \,?\, 4\cdot 2019$ квадрат.

$2\sqrt{2018\cdot 2020} \,?\, 4\cdot 2019-2019-2019$

$\sqrt{2018\cdot 2020} \,?\, 2019$ $\sqrt{a} \geq 0$; $2019>0 \Rightarrow$ можем возвести обе части в квадрат.

$2018\cdot 2020 \,?\, 2019^2$

$(2019-1)(2019+1) \,?\, 2019^2$

$2019^2-1 \,?\, 2019^2$

$2019^2-1 < 2019^2$

Ответ: $A<B$

10

3.

$\begin{cases} x+y=a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \,|\cdot 2 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2=(a+1)^2 \\ 2xy=2a^2-14a+32 \end{cases}$ $\xrightarrow{-}$ $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=a^2+2a+1 \\ 2xy=2a^2-14a+32 \end{cases}$

$x^2+y^2=-a^2+16a-31$. $f(a)=-a^2+16a-31$ график — парабола; коэффициент при a^2 отрицательный, значит ветви направлены вниз $\Rightarrow$ максимальное значение будет в вершине

3 (продолжение)

~~$y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{16^2}{-4} + (-31) = \frac{16^2}{4} - 31 = 64 - 31 = 33$~~

~~Ответ:~~

$a_0 = -\frac{b}{2a'} = -\frac{16}{-2} = 8$ a' – коэффициент при a^2.

10

$a \neq 0 \Rightarrow a = 7$

Ответ: при $a=8$.

5.

$y(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+tg^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$

$y(x) = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2}$

$y(x) = |\cos x| \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \cdot |x-2|$

$y(x) = |\cos x| \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot |x-2|$

$y(x) = \frac{|\cos x|}{|\cos x|} \cdot |x-2|$

$y(x) = |x-2|$

$y = \begin{cases} x-2; & x \geq 2 \\ -x+2; & x < 2 \end{cases}$

15

ОДЗ: $\begin{cases} \sin^2 x \leq 1 \\ x^2-4x+4 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in R \\ (x-2)^2 \geq 0 \end{cases}$

$x \in R$.

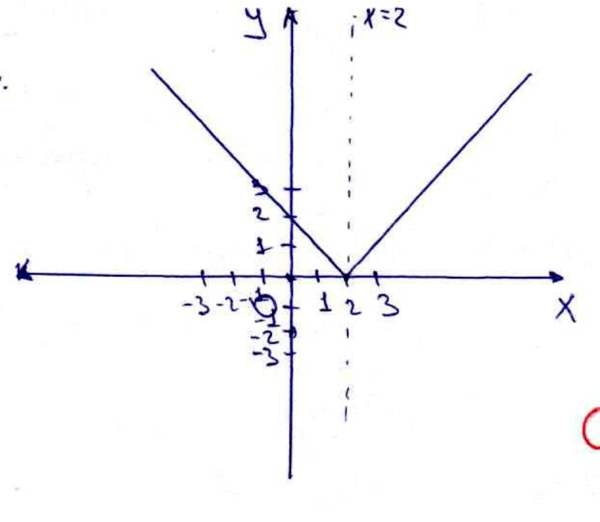
$y = x-2$ Функция прямой пропорциональности, график – прямая.

x	0	2
y	-2	0

$y = -x+2$ Функция прямой пропорциональности, график – прямая.

x	2	0
y	0	2

Ответ:



$\cos x \neq 0$

ШИФР 4 4 0 5 4

1.

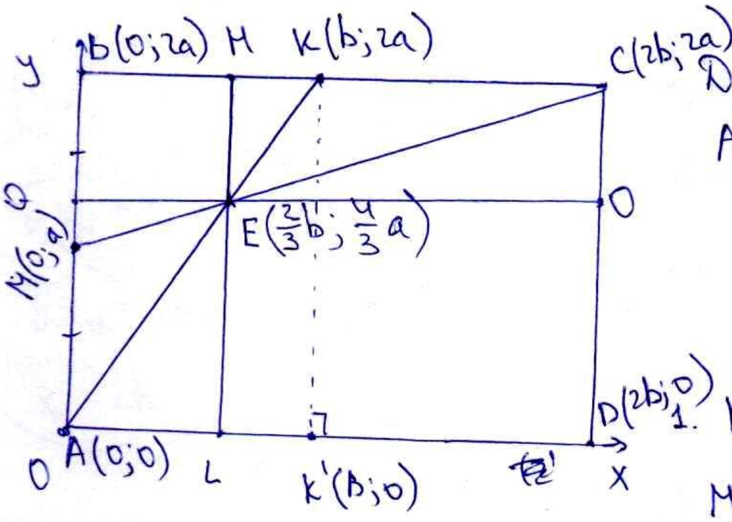
Минутна стрелка делает оборот, то есть проходит 360° за 60 минут => её скорость. $6\ \frac{\circ}{мин}$. Часовая стрелка проходит 360° за 12 часов, то есть за $12\cdot60$ минут => её скорость $\frac{360}{12\cdot60}=\frac{1}{2}\ \frac{\circ}{мин}$ =>

5

=> Скорость с которой минутная стрелка догоняет часовую равна $5{,}5\ \frac{\circ}{мин}$. На начальный момент между стрелками 150°, т.к. каждый час равен 30°, т.к. 360° составляют 12 часов. => $t=\frac{150^\circ}{5{,}5\frac{\circ}{мин}}=\frac{300}{11}$ (мин) $=27\frac{3}{11}$ мин

Ответ: через $27\frac{3}{11}$ мин.

4.



Дано: $AM=BM$; $BK=CK$;
ABCD-прямоугольник
Н-ти $\frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}}$.

Решение:

1. Пусть координаты точки $M(0;a)$, тогда $B(0;2a)$.
Пусть координаты точки $K'(b;0)$, тогда $K(b;2a)$, $C(2b;2a)$.

2. ~~Прямая~~ MC MC-отрезок, часть прямой => мы можем задать функцию: $f(x)=kx+u$. Эта функция проходит через точки $M(0;a)$ и $C(2b;2a)$. Составим систему уравнений: $\cancel{0=ka+u}$

$$\begin{cases}a=k\cdot0+u\\2a=k\cdot2b+u\end{cases}\quad\begin{cases}u=a\\a=k\cdot2b\end{cases}\quad\begin{cases}u=a\\k=\frac{a}{2b}\end{cases}\Rightarrow$$

4 (продолжение)

$\Rightarrow f(x)=\frac{a}{2b}x+a$

Отрезок AK – часть прямой $\Rightarrow$ зададим функцию $g(x)$.
~~прямая~~ $g(x)=k'x+u'$. Прямая проходит через точки $A(0;0)$ и $K(b;2a)$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0=k'\cdot 0+u' \\ 2a=k'\cdot b+u' \end{cases} \quad \cancel{\begin{cases} u'=0 \\ k'= \end{cases}} \quad \begin{cases} u'=0 \\ 2a=b\cdot k' \end{cases} \quad \begin{cases} u'=0 \\ k'=\frac{2a}{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(x)=\frac{2a}{b}x$

Точка E – пересечение прямых MC и AK $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0)=g(x_0)$, где x_0 – координата точки E по OX:

$\frac{a}{2b}x_0+a=\frac{2a}{b}x_0 \;|\cdot 2b \Rightarrow ax_0+2ab=4ax_0$

$2ab=3ax_0$

$x_0=\frac{2}{3}b \Rightarrow$

$\cancel{ax_0+2ab=2ax_0}$

$\cancel{ax_0=2ab}$

$\cancel{x_0=2b}$

$\Rightarrow y_0=g(x_0)=\frac{2a}{b}\cdot\frac{2}{3}b=\frac{4}{3}a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Координаты точки $E(\frac{2}{3}b;\frac{4}{3}a)$. Проведем прямую $HL \parallel OY$, и $QO \parallel OX$ через точку E $\Rightarrow$ на прямой HL сохраняется координата по X, а на OQ координата по Y $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ найдем координаты точек H, L, O, Q: $H_x=E_x=\frac{2}{3}b$; $H_y=B_y=2a \Rightarrow H(\frac{2}{3}b;2a)$; $L_x=E_x=\frac{2}{3}b$; $L_y=A_y=0 \Rightarrow L(\frac{2}{3}b;0)$.

ШИФР 4 4 0 5 4

4 (продолжение).

$O_y = E_y = \frac{4}{3}a$; $O_x = C_x = 2b$; $Q_y = E_y = \frac{4}{3}a$; $Q_x = A_x = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow O(2b; \frac{4}{3}a)$; $Q(0; \frac{4}{3}a)$

$S_{MBKE} = S_{MQE} + S_{QBHE} + S_{EHK} =$

$= \frac{1}{2} MQ \cdot EQ + EQ \cdot EH + \frac{1}{2} EH \cdot HK$;

$MQ = \sqrt{(x_Q - x_M)^2 + (y_Q - y_M)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2} = \frac{1}{3}a$

$EQ = \sqrt{(x_E - x_Q)^2 + (y_E - y_Q)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}b\right)^2} = \frac{2}{3}b$

$EH = \sqrt{(x_H - x_E)^2 + (y_H - y_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{2}{3}a$

$HK = \sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}b\right)^2} = \frac{1}{3}b$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MBKE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}b \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{3}b = \frac{1}{9}ab + \frac{4}{9}ab + \frac{1}{9}ab =$

$= \frac{2}{3}ab$

$S_{AECD} = S_{AEL} + S_{EODL} + S_{ECO} = \frac{1}{2} EL \cdot OL + EL \cdot OE + \frac{1}{2} \cdot EO \cdot CO =$

$EL = \sqrt{(x_L - x_E)^2 + (y_L - y_E)^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}a\right)^2} = \frac{4}{3}a$

$OL = \sqrt{(x_L - x_O)^2 + (y_L - y_O)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}b\right)^2} = \frac{2}{3}b$

$OE = \sqrt{(x_O - x_E)^2 + (y_O - y_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}b\right)^2} = \frac{4}{3}b$

$CO = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{2}{3}a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AECD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}a \cdot \frac{2}{3}b + \frac{4}{3}a \cdot \frac{4}{3}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}b \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4}{9}ab + \frac{16}{9}ab + \frac{4}{9}ab =$

$= \frac{24}{9}ab = \frac{8}{3}ab$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 4 0 5 4

4 (продолжение) ⇒

$\Rightarrow \frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}} = \frac{\cancel{\frac{8}{3}ab}}{\cancel{\frac{24}{9}ab}} \quad \frac{\frac{2}{3}ab}{\frac{8}{3}ab} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

20

⇒ Ответ: S_{MBKE} меньше S_{AECD} в 4 раза, то есть:

$\frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}} = \frac{1}{4}$.

6.

Пусть $GH = a$; $DN = c$; $AB = b$, тогда $15a + b(20+a+c) + 35c = 1600$.
Возьмём начальное $a=10$, тогда когда мы увеличиваем a, то периметр увеличивается на $2\Delta a$, площадь становится равна $15a + 15\Delta a + (20+a+c)b + b\Delta a + 35c = 1600 + (15+b)\Delta a \Rightarrow$
$\Delta S = \Delta a(15+b)$. Чтобы уравнять периметр надо изменить b и c.
~~Далее $\Delta b = |\Delta b|$; $\Delta c = |\Delta c|$~~, тогда.

0

$\Delta S_c = b\Delta c + 35\Delta c = (b+35)\Delta c$

$\Delta S_b = (20 + a + \Delta a + \Delta c \cancel{b} + c)\Delta b \quad \Rightarrow \Delta S = \Delta c(b+35) + \Delta b(30 + \Delta a + \Delta c) + \Delta b\Delta c$

$\Delta S_{bc} = \Delta b \cdot \Delta c$.

$2\Delta b + 2\Delta c + 2\Delta a < 0$

$\Delta b + \Delta c + \Delta a < 0$.