ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a*b)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

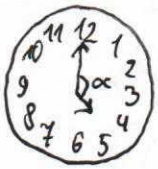
ШИФР 4 4 1 5 9

Класс 10 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	20	10					75	семьдесят пять	Клим

№1.



$\alpha = \frac{360^\circ}{12} \cdot 5 = 150^\circ$ - угол между часовой и минутной стрелкой в 5 часов

$V_{мин} = 360^\circ/ч$ - угловая скорость минутной стрелки

$V_ч = 30^\circ/ч$ - угловая скорость часовой стрелки

$\Delta V = V_{мин} - V_ч = 360^\circ/ч - 30^\circ/ч = 330^\circ/ч$ - угловая скорость сближения стрелок.

$t = \frac{\alpha}{\Delta V} = \frac{150^\circ}{330^\circ/ч} = \frac{15}{33} ч = \frac{5}{11} ч$ - время, через которое минутная стрелка догонит часовую после 5 часов.

5

Ответ: $\frac{5}{11}$ часа.

№2.

$A = \sqrt{2018} + \sqrt{2020}$, $B = 2\sqrt{2019}$

$A \vee B$

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} \vee 2\sqrt{2019}$ $\uparrow^2$ (т.к. обе части неравенства больше 0)

$2018 + 2\sqrt{2018 \cdot 2020} + 2020 \vee 8076$

$4038 + 2\sqrt{2018 \cdot 2020} \vee 8076$

$2\sqrt{2018 \cdot 2020} \vee 4038$

$\sqrt{2018 \cdot 2020} \vee 2019$

Замена: $2019 = a$, $a > 0$

$\sqrt{(a-1)(a+1)} \vee a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-1} \vee a$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-1} \vee \sqrt{a^2}$ (т.к. $a > 0$)

$\sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2} \Leftrightarrow \sqrt{2018 \cdot 2020} < 2019$ $\Leftrightarrow$

обратная замена

$\Leftrightarrow \sqrt{2018} + \sqrt{2020} < 2\sqrt{2019} \Leftrightarrow A < B$

10

Ответ: $A < B$

№3.

ОДЗ: $(a;x;y)\in\mathbb{R}^3$

$\begin{cases} x+y=a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \end{cases}$ $a=?$ x^2+y^2 – максимально

$x+y=a+1 \Leftrightarrow (x+y)^2=(a+1)^2$

$\left.\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2=a^2+2a+1 \\ xy=a^2-7a+16 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2\cdot(a^2-7a+16)+y^2=a^2+2a+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2=a^2+2a+1-2a^2+14a-32$

$x^2+y^2=-a^2+16a-31$ (10)

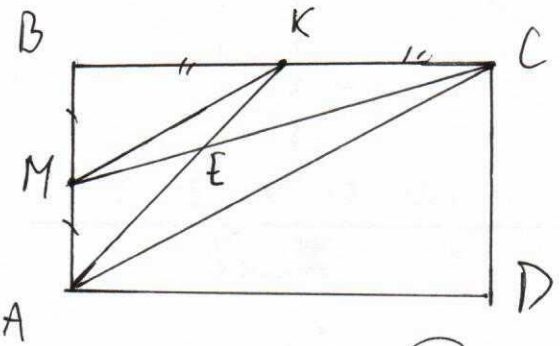
$f(a)=-a^2+16a-31$ – график функции – парабола с ветвями, направленными вниз $\Rightarrow$ максимальное значение функции достигается в вершине параболы

$x_{\text{вершины параболы}}=-\frac{16}{-2}=8$ $\Rightarrow a=7!$

$y_{\text{вершины параболы}}=f(8)=-8^2+16\cdot 8-31=-64+128-31=33$ – максимальное значение $f(a)$, а также $x^2+y^2 \Rightarrow a=8\in$ ОДЗ

Ответ: 8

№4.



Дано: $ABCD$ – прямоуг.
M – серед. AB
K – серед. BC
$AK \cap MC = E$
Найти: $\frac{S_{MBKE}}{S_{AECD}}=?$

Решение:

1) $S_{MBKE}=S_{\triangle MBK}+S_{\triangle MEK}$; $S_{AECD}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle AEC}$

2) Рассмотрим $\triangle MBK$ и $\triangle ACD$:
$MB:CD=1:2$
$BK:AD=1:2$
$MK:AC=1:2$ (т.к. MK – ср. линия $\triangle ABC$ по определению ($AM=MB$; $BK=KC$))
$\Rightarrow \triangle MBK \overset{k=2}{\sim} \triangle ACD$

№4 (продолжение)

3) $\triangle MBK \overset{k=2}{\sim} \triangle ACD \Leftrightarrow \dfrac{S_{\triangle MBK}}{S_{\triangle ACD}} = \dfrac{1}{4}$ $\left(\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle MBK}} = 4$ - квадрат коэф. подобия$\right)$

4) Рассмотрим $\triangle MEK$ и $\triangle AEC$

$MK : AC = 1:2$ (MK - ср. линия $\triangle ABC$)

$EK : AE = 1:2$ (AK, CM - медианы $\triangle ABC$, $E = AK \cap MC$ (св-во медиан треугольника))

$ME : EC = 1:2$ (аналог.)

$\Rightarrow \triangle MEK \overset{k=2}{\sim} \triangle AEC$

5) Аналог. п. 3) $\dfrac{S_{\triangle MEK}}{S_{\triangle AEC}} = \dfrac{1}{4}$

20

6) $\dfrac{S_{MBKE}}{S_{AECD}} = \dfrac{S_{\triangle MBK} + S_{\triangle MEK}}{S_{\triangle ADC} + S_{\triangle AEC}} = \dfrac{S_{\triangle MBK} + S_{\triangle MEK}}{4(S_{\triangle MBK} + S_{\triangle MEK})} = \dfrac{1}{4}$

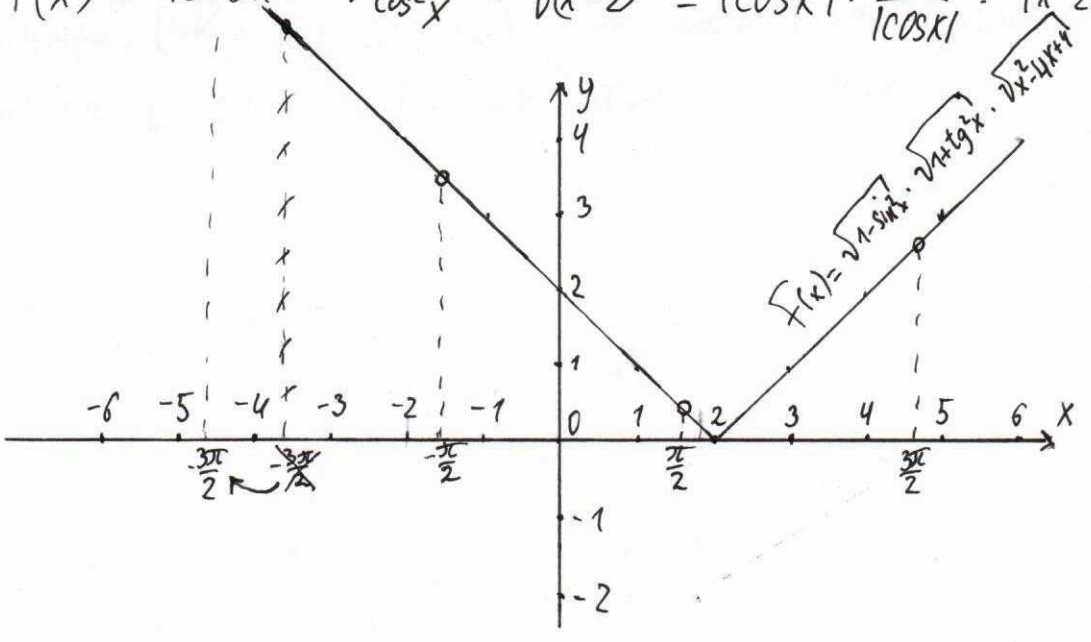
Ответ: $\dfrac{S_{MBKE}}{S_{AECD}} = \dfrac{1}{4}$

№5.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

$f(x) = y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt{x^2-4x+4}$

$f(x) = |\cos x| \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot \sqrt{(x-2)^2} = |\cos x| \cdot \frac{1}{|\cos x|} \cdot |x-2| = |x-2|$



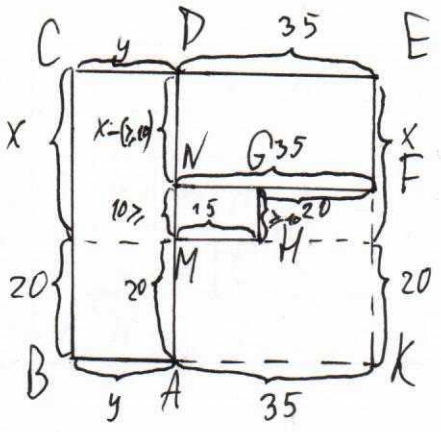
20

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | Ч | Ч | 1 | 5 | 9 |

№6.



Чтобы ограждение этого участка имело наименьшую длину, нужно, чтобы ограждение имело форму квадрата.

$(X+20)=(y+35)$

доб-во!

$y=X-15$

$S_{ABCEFGHM}=1600=$

$=(X-15)\cdot(X+20)+35\cdot(X-10)+150$

$1450=X^2+5X-300+35X-350$

$X^2+40X-2100=0$

$D=40^2-4\cdot1\cdot(-2100)=8400+1600=10000=100^2$

$X=\frac{-40+100}{2}=30 \Rightarrow y=15$

10

Если за ограждение считать периметр квадрата BCEK, то его длина $L=(15+35)\cdot4=200$(м)

Тогда $BK=KE=50$(м), GH может быть равен 10м (или >10м)

Ответ: $L=200$м; $BK=KE=50$м; $GH=10$м.