

ШИФР

4 5 2 1 7

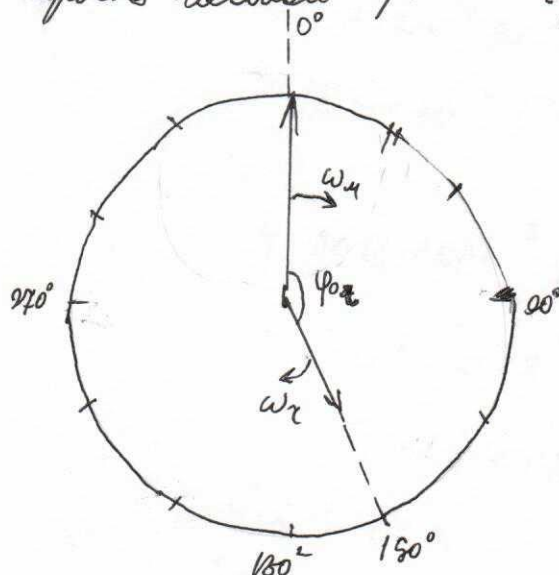
Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2010

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	10	10	20	5					60	шестьдесят	Кит

51

Даны угловые скорости часовой стрелки ω_2 , минутной ω_1 .



$$\omega_2 = 30 \frac{^\circ}{\tau}$$

$$\omega_1 = 360 \frac{^\circ}{\tau}$$

$$\varphi_{02} = 150^\circ$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{01} + \omega_1 t \\ \varphi_2 = \varphi_{02} + \omega_2 t \\ \varphi_1 = \varphi_2 \text{ (условие, при котором мин. стрелка догонит часовую)} \end{cases}$$

$$\varphi_{01} + \omega_1 t = \varphi_{02} + \omega_2 t$$

$$360 \cdot t = 150 + 30 t$$

$$330 t = 150$$

$$t = \frac{150}{330} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11} \tau$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{11} \tau$$

5

ШИФР

4 5 2 1 7

52

$$A = \sqrt{2018} + \sqrt{2020}$$

$$B = 2\sqrt{2019}$$

$A^2 B$

$$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} \cdot 2\sqrt{2019} \quad | \quad \uparrow 2; : 2;$$

$$1009 + 1010 + \sqrt{2018 \cdot 2020} \cdot 2 \cdot 2019;$$

$$2019 + \sqrt{2018 \cdot 2020} \cdot 2 \cdot 2019; \quad | \quad - 2019$$

$$\sqrt{2018 \cdot 2020} \cdot 2019 \quad | \quad \uparrow 2$$

$$2018 \cdot 2020 \cdot 2019^2$$

$$2018 \cdot 2020 \cdot \left(\frac{2018+2020}{2}\right)^2 \quad | \cdot 4$$

$$4 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2018^2 + 2 \cdot 2018 \cdot 2020 + 2020^2 \quad | \quad - 4 \cdot 2018 \cdot 2020$$

$$0 \cdot 2018^2 - 2 \cdot 2018 \cdot 2020 + 2020^2$$

$$0 < (2018 - 2020)^2$$

Ответ: $A < B$

53

$$\begin{cases} x+y = a+1 \\ xy = a^2 - 7a + 16 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \max - ?$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2xy = (a+1)^2 - 2(a^2 - 7a + 16) =$$

$$= a^2 + 2a + 1 - 2a^2 + 14a - 32 = -a^2 + 16a - 31$$

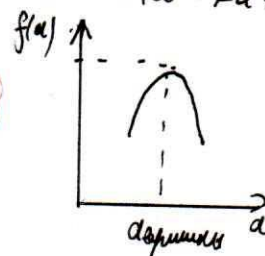
$$\text{Рассмотрим функцию } f(a) = -a^2 + 16a - 31$$

значит, максимальное значение будет в вершине

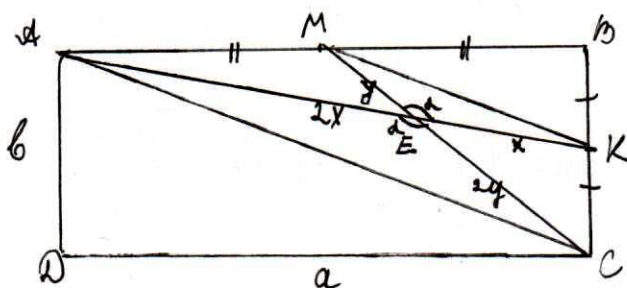
$$a_0 = \frac{-16}{-2} = 8$$

Ответ: при $a = 8$

$100 = 7a = 7!$



54



Дано:

ABCD - прямоугол.

AM = MB

BK = KC

AM ⊥ MC = E

$S_{MBKE} \cdot S_{AECD} = ?$

Решение

Решение. Проведём диагональ AC. Рассмотрим $\triangle ABC$:
в нем AM и CM - медианы. Медианы точкой пересечения делятся
в отношении 2:1, считая от вершин.

Пусть $AM = a$, $BC = b$. Тогда $AD = b$ и $DC = a$ (так как ABCD - прямоугольник).

$$MB = \frac{AM}{2} = \frac{a}{2}; \quad BK = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2};$$

Рассмотрим $\triangle ECD$:

$$S_{AECD} = S_{ADC} + S_{AEC} = \frac{AD \cdot DC}{2} + \frac{AE \cdot EC \cdot \sin \angle AEC}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{xy \cdot \sin \angle AEC}{2} = \frac{ab}{2} + 2xy \sin \angle AEC$$

Рассмотрим $\triangle MBKE$:

$$S_{MBKE} = S_{MBE} + S_{MKE} = \frac{MB \cdot BK}{2} + \frac{EM \cdot EK \cdot \sin \angle MEK}{2} = \frac{ab}{8} + \frac{xy}{2} \sin \angle AEC$$

$$S_{AECD} \cdot S_{MBKE}$$

$$\frac{ab}{2} + 2xy \sin \angle AEC \cdot \frac{ab}{8} + \frac{xy}{2} \sin \angle AEC$$

$$0 > \frac{ab}{8} - \frac{ab}{2} + \frac{xy}{2} \sin \angle AEC - 2xy \sin \angle AEC < 0$$

значит, $S_{AECD} > S_{MBKE}$

Ответ: $S_{AECD} > S_{MBKE}$

во сколько раз?

10

ШИФР

4 5 2 1 7

ω5

$$y = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 x} \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 x} \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot \sqrt{(x-2)^2} =$$

$$= |x-2|$$

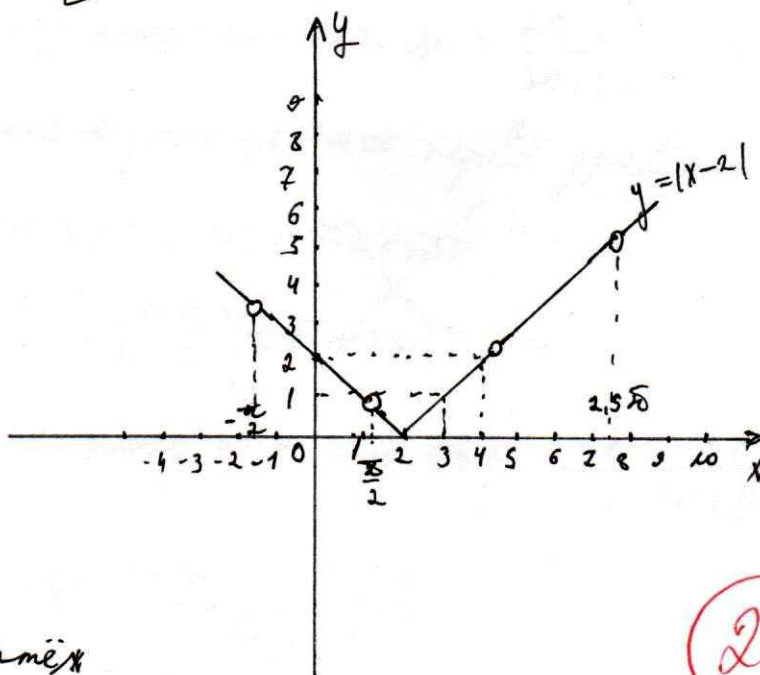
$$\begin{cases} y = |x-2| \\ 1 - \sin^2 x \geq 0 \\ 1 + \tan^2 x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = |x-2| \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi N\} \end{cases}$$

$$1 - \sin^2 x \geq 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } \sin \leq 1$$

$$1 + \tan^2 x > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi N\}, N \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0, \text{ т.к.}$$

$$|x-2|^2 \geq 0$$



Ответ: см. чертёж

20



ШИФР

4 5 2 1 2

56

$$GF = MA = GF = 20$$

$$MH = 15 \text{ м}$$

$$GH \geq 10 \text{ м}$$

$$S_{\text{дв. с. EF в ч. ч.}} = 1600 \text{ м}^2$$

Составим систему

$$\begin{cases} MH \cdot GH + AB(AM + GH + EF) + EF(GF + MH) = 1600 & (1) \\ (AB + MH + AM)(AM + GH + EF) - (AM + GH)(AM + MH) + GH \cdot MH = 1600 & (2) \end{cases}$$

$$(AB + MH + AM)(AM + GH + EF) - (AM + GH)(AM + MH) + GH \cdot MH = 1600 & (2)$$

Упростив (2) получим, что $AB = \frac{2500}{30 + EF} - 35$;

Подставим это в упрощённое первое уравнение

$$150 + 30AB + AB \cdot EF + 35EF = 1600$$

$$30 \left(\frac{2500}{30 + EF} \right) + \left(\frac{2500}{30 + EF} \right) EF + 35EF = 1600$$

Упростив (1) получим, что $AB = \frac{1450 - 35EF}{30 + EF}$

$$\frac{2500}{30 + EF} - 35 = \frac{1450 - 35EF}{30 + EF}$$

$$2500 - 35(30 + EF) = 1450 - 35EF$$

5