ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

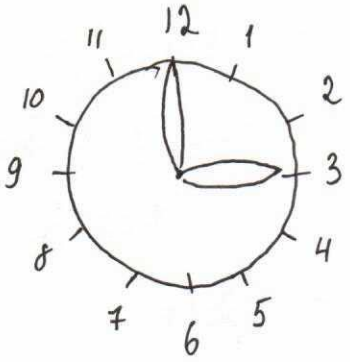
ШИФР 3 4 5 8 3

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	15	10					70	семьдесят	Кемя

№1



Скорость движения минутной стрелки равна перемещению от 12 до 1, то есть 30° в 5 минут или 6° в минуту

Скорость часовой стрелки равна 30° в час или 30° в 60 мин или 0,5° в мин.

5

Если бы часовая стрелка не двигалась, то скорость минутной бы стала 6°-0,5° в мин, то есть 5,5° в мин. Расстояние между ними 90°, то есть мин стрелка бы прошла это за $\frac{90°}{5,5°/\text{мин}} = \frac{180}{11}$ мин = 16,(36) мин.

Ответ: за 16,(36) минут.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 4 5 8 3

№2.

$A = \sqrt{2017} + \sqrt{2019}$

$B = 2\sqrt{2018}$

$A \overset{?}{<} B$

$\sqrt{2017} + \sqrt{2019} \overset{?}{<} 2\sqrt{2018} \quad | \,^2$

$2017 + 2\sqrt{2017 \cdot 2019} + 2019 \overset{?}{<} 4 \cdot 2018$

$2\sqrt{2017 \cdot 2019} \overset{?}{<} 2 \cdot 2018 \quad | \,^2$

$2017 \cdot 2019 \overset{?}{<} 2018^2$

$(2018-1)(2018+1) \overset{?}{<} 2018^2$

$2018^2 - 1 \overset{?}{<} 2018^2$

Путем преобразований получили, что $A < B$, т.к. $2018^2 - 1 < 2018^2$.

10

Ответ: $A < B$

№3

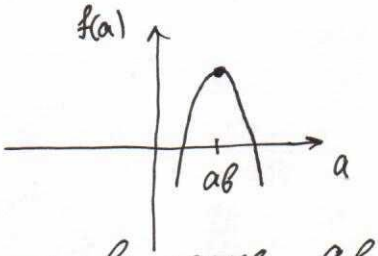
$$\begin{cases} x+y = a-1 \\ xy = a^2 - 7a + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = (a-1)^2 \\ 2xy = 2a^2 - 14a + 28 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)_{max} - ?$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (a-1)^2 - 2a^2 + 14a - 28 = a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 14a - 28 =$

$= -a^2 + 12a - 27$

10

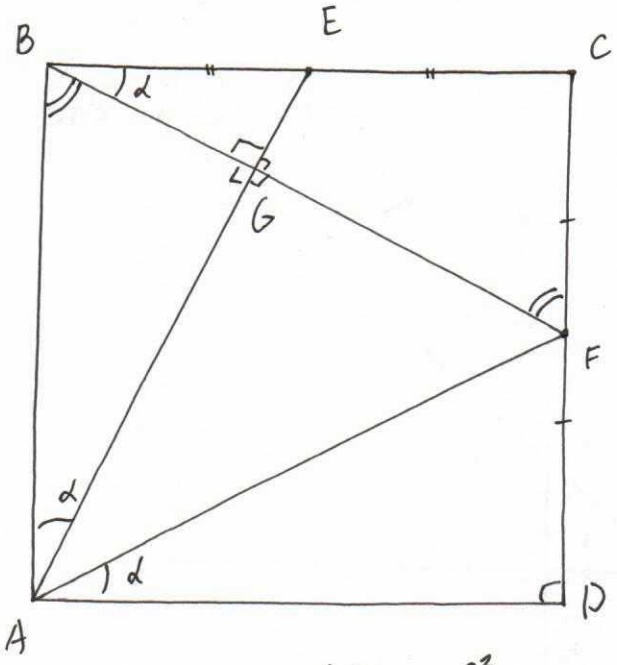


максимум будет в точке $ав = -\frac{B}{2A} = \frac{12}{2} = 6$.

Ответ: при $a = 6$

$D > 0 \Rightarrow a = 5$

№4



Допустим сторона квадрата = a и $\angle CBF=\alpha$

1. $\angle GBA=90-\alpha=\angle CFB$
2. $\triangle BCF=\triangle AFD$ (по 2-м катетам $BC=AD$, $CF=FD$) $\Rightarrow \angle FAD=\angle CBF=\alpha$
3. $\triangle BEA=\triangle AFD$ (по 2-м катетам $AB=AD$ и $BE=FD$) $\Rightarrow \angle BAG=\angle FAD=\alpha$
4. В $\triangle BGA$: $\angle GAB=\alpha$, $\angle GBA=90-\alpha$ $\Rightarrow \angle BGA=90°$.
5. $S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}BC\cdot FC=\frac{1}{2}\frac{a}{2}\cdot a=\frac{a^2}{4}$
6. $AF=\sqrt{AD^2+FD^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ (по т-ме Пифагора)
7. $\triangle BEG \sim \triangle AFD$ (по 2-м углам $\angle FAD=\angle EBG=\alpha$ и $\angle EGB=90°$)

$$K=\frac{BE}{AF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{EG}{FD}=\frac{EG}{\frac{a}{2}} \Rightarrow EG=\frac{a}{2\sqrt{5}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{BG}{AD}=\frac{BG}{a} \Rightarrow BG=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

8. $S_{\triangle BEG}=\frac{1}{2}BG\cdot GE=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{a^2}{4\cdot 5}=\frac{a^2}{20}$
9. $S_{GECF}=S_{BCF}-S_{BEG}=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{20}=\frac{4a^2}{20}=\frac{a^2}{5}$
10. $GF=BF-BG=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{\sqrt{5}}=\frac{5a-2a}{2\sqrt{5}}=\frac{3a}{2\sqrt{5}}$

$AG=AE-EG=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2\sqrt{5}}=\frac{4a}{2\sqrt{5}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

11. $S_{AGF}=\frac{1}{2}GF\cdot AG=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3a}{2\sqrt{5}}=\frac{6a^2}{20}=\frac{3a^2}{10}$

20

11. $\frac{S_{GECF}}{S_{AGF}}=\frac{\frac{a^2}{5}}{\frac{3a^2}{10}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3} \Rightarrow S_{AGF}>S_{GECF}$

Ответ: $S_{AGF}>S_{GECF}$ $\left(\frac{S_{GECF}}{S_{AGF}}=\frac{2}{3}\right)$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 3 | 4 | 5 | 8 | 3 |

№5

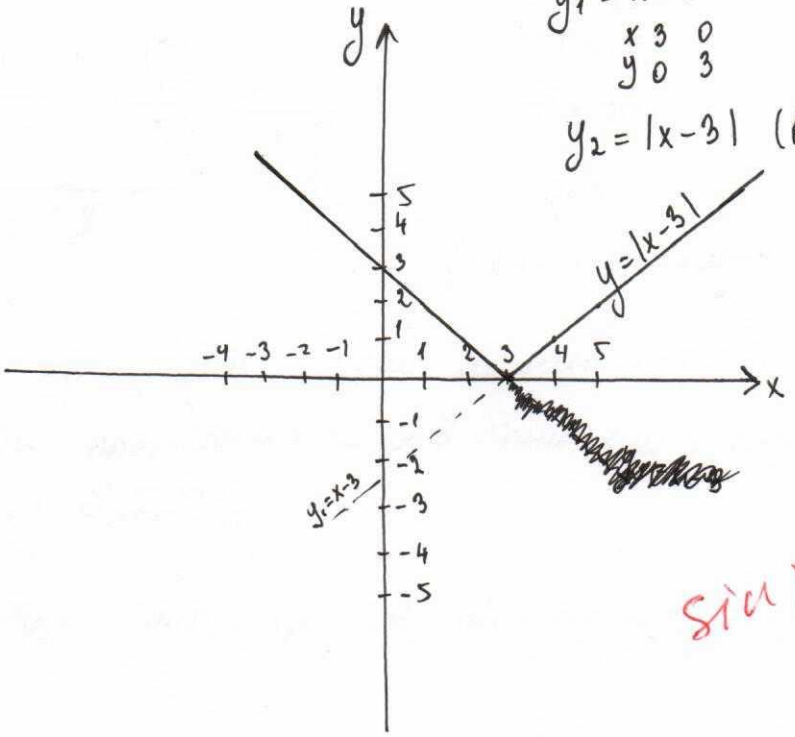
$$y = \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}} \cdot \sqrt{(x-3)^2} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot |x-3| = |x-3|$$

$y_1 = x - 3$

x	3	0
y	0	3

$y_2 = |x-3|$ (все, что ниже оси Ox отражаем вверх



15

$\sin x \neq 0$

Ответ: см. график.

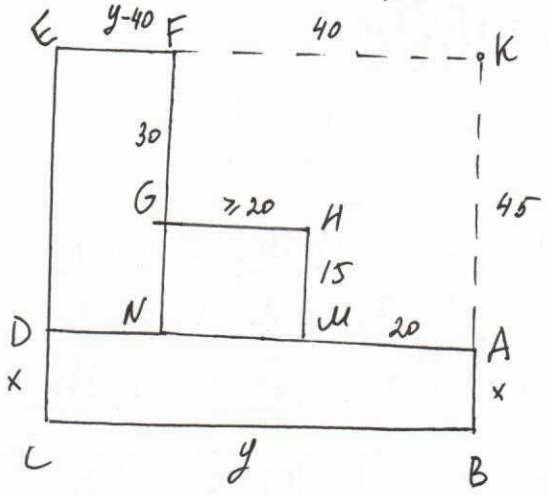
ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$ $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 4 5 8 3

№6



Дано:

$S_{FECBAMHG} = 2100$ кв.м

$MA = 20$ м

$GF = 30$ м

$MH = 15$ м

$GH \geq 20$ м

Найти:

$(EF + FG + GH + HM + MA + AB + BC + CE)_{min} - ?$

Решение:

Чтобы длина ограждения была минимальной, нужно чтобы площади прямоугольников в бани минимальны и подходили под $S_{лагеря}$.

1. S_{GNMH} будет min, при $GH = 20$м $\Rightarrow S_{GNMH} = GH \cdot MH = 300$ м, а $GH + MH = 35$м.

2. $AK = HM + FG = 45$м

$FK = GH + AM = 40$м

3. Пусть $BC = y$, тогда $EF = y - 40$, а $AB = x = DC$, тогда

$$\begin{cases} (y - 40 + 30 + 20 + 15 + 20 + x + y + x + 45)_{min} \\ (y - 40) \cdot 45 + x \cdot y + 20 \cdot 15 = 2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2x + 90 \\ 45y - 1800 + xy + 300 = 2100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 2y + 90)_{min} \Rightarrow \begin{cases} x_{min} - ? \\ y_{min} - ? \end{cases} \\ 45y + xy = 3600 \end{cases} \begin{cases} y \cdot (x + 45) = 3600 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 60$; $x = 15$ = ?

$\Rightarrow$ длина забора (минимальная) $= 2 \cdot 15 + 2 \cdot 60 + 90 =$

$= 30 + 120 + 90 = 240$ м

$\Rightarrow (BK)_{min} = 46$ м

$(KE)_{min} = 41$ м

Ответ: минимальная длина забора = 240м

$(BK)_{min} = 46$ м

$(KE)_{min} = 41$ м

10