

ШИФР

3 9 6 5 6

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 9.02.2019

Площадка написания МТТЗ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	0	10	10	20	20	30					90	девя- тидесято	Кич

и 3. $\begin{cases} x+y=a-1 & (1) \\ xy=a^2-4a+14 & (2) \end{cases}$ Возведём в квадрат (1) и умножим на (2):

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=a^2-2a+1 & (*) \\ 2xy=2a^2-4a+28 & (**) \end{cases}$$

Вычтем из 1-ого уравнения 2-ое

16

$x^2+y^2=-a^2+12a-27$. (x^2+y^2) принимает наибольшее значение, когда $(-a^2+12a-27)$ принимает наибольшее значение. Введём вспомогательную ф-цию $f(a)=-a^2+12a-27$. График ф-ции - парабола с ветвями, направленными вниз. Значит, наибольшее значение ф-ция достигает в вершине параболы a_0 : $a_0 = \frac{-12}{-2} = 6$. Значит, при $a=6$ x^2+y^2 принимает наибольшее значение.

$a \geq 0, a=5$

Ответ: $a=6$.

и 2.

$$A = \sqrt{2017} + \sqrt{2019}$$

$$B = 2\sqrt{2018}$$

Пусть $2018=a$. Сравним: $\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}$ и $2\sqrt{a}$.

$\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} \sqrt{2\sqrt{a}}$ П.к. обе части пер-ва больше нуля, возведём их в квадрат:

$$a-1+a+1+2\sqrt{a^2-1} \sqrt{4a}$$

$$2\sqrt{a^2-1} \sqrt{2a}$$

$$\sqrt{a^2-1} \sqrt{a}$$

$$a^2-1 \sqrt{a^2}$$

Снова возведём в квадрат:

$-1 < 0$, значит, правая часть пер-ва

больше, значит, $B > A$.

Ответ: $2\sqrt{2018} > \sqrt{2017} + \sqrt{2019}$.

и 5.

$$y = \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot \sqrt{1+\cos^2 x} \cdot \sqrt{x^2-6x+9}$$

применим тождество: 1) $1+\cos^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Преобразуем правую часть: 1) $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ по тожд.

$$2) x^2-6x+9 = (x-3)^2$$

$$y = \sqrt{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \sqrt{(x-3)^2}$$

$$D(y): \sin x \neq 0$$

$$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

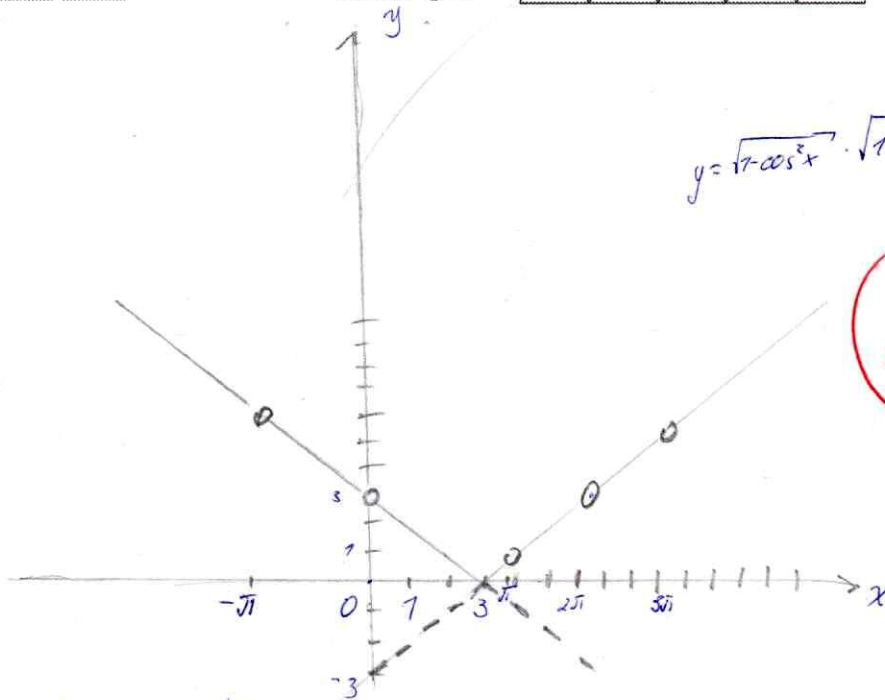
$$y = |x-3|$$

Чтобы построить график этой ф-ции, нужно построить график:

$$y = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ 3-x, & x < 3 \end{cases}$$

или 2. листок.

с/5 (продолж.).



20

и 4.

Дано: ABCD - квадрат

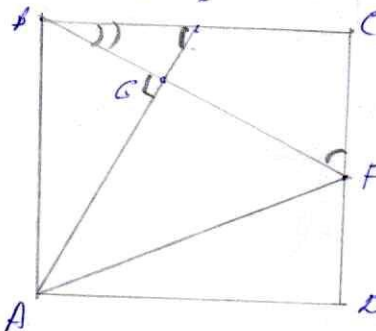
BE = EC

CF = FD

HE ⊥ BF = G

Найти: $\frac{S_{GECH}}{S_{ABF}}$ - ?

Решение: 1) Пусть, BC = 2a. Тогда, $S_{ABCD} = 4a^2$.



$S_{BCF} = S_{AFD}$ (т.к. $\triangle BCF \sim \triangle AFD$ по двум катетам). $S_{BCF} = 2a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.

$S_{BFA} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$.

2) $\frac{S_{ABF}}{S_{BFA}} = \frac{BF}{BF}$ (т.к. $\angle BGA$ и $\angle BFA$ являются смежными углами $\angle BFA$).

$$3) \frac{S_{BCF} - S_{GECH}}{S_{BCF}} = \frac{BE \cdot BC}{2BE \cdot BF} = \frac{BG}{2BF} \Rightarrow \frac{S_{GECH}}{S_{BCF}} = 1 - \frac{BG}{2BF} \Rightarrow S_{GECH} = \left(1 - \frac{BG}{2BF}\right) \cdot S_{BCF}$$

$$4) \frac{S_{BFA}}{S_{AFD}} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \Rightarrow S_{BFA} = 2S_{AFD} = 2S_{BCF} \quad S_{BCF} = \frac{S_{BFA}}{2} = \frac{1}{2} \cdot S_{ACF} \cdot \frac{BF}{FG}$$

$$5) \frac{S_{GECH}}{S_{BCF}} = \frac{S_{GECH}}{1 - \frac{BG}{2BF}} = \frac{1}{2} S_{ACF} \cdot \frac{BF}{FG}$$

$$= \frac{2BF - BG}{4FG}$$

6) Заметим, что $\angle EBA = \angle BCF$ по 2-м катетам, значит, $\angle BEA = \angle BFC$, $\angle BAE = \angle CBF$, значит, $\triangle BGE \sim \triangle CBF$ по 2-м углам.

$$\angle BGE = 90^\circ, \text{ т.к. } \angle BEA + \angle EBG = 90^\circ. \triangle BGE \sim \triangle CBF \text{ по 2-м углам:}$$

$$\frac{BG}{BC} = \frac{EG}{CF} = \frac{BE}{BF} \Rightarrow \frac{BG}{2a} = \frac{a}{\sqrt{5}a} \quad BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

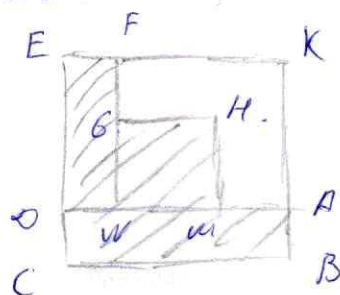
$$BG = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \quad FG = BF - BG = \sqrt{5}a - \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{5a - 2a}{\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

$$7) \frac{S_{GECH}}{S_{ACF}} = \frac{2BF - BG}{4FG} = \frac{2\sqrt{5}a - \frac{2a}{\sqrt{5}}}{4 \cdot \frac{3a}{\sqrt{5}}} = \frac{10a - 2a}{\sqrt{5}} : \frac{12a}{\sqrt{5}} = \frac{8a}{12a} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $2:3$.

20

н 6.



Пусть, $BK = x$, $EK = y$, $CH = z$.

$$S_{yz} = S_{EFND} + S_{MCHM} + S_{CDAB}.$$

$$S_{EFND} = FE \cdot ED = (y - 20 - z) \cdot 45.$$

$$S_{MCHM} = 15z.$$

$$S_{CDAB} = (x - 45) \cdot y.$$

$$1100 = 45y - 900 - 45z + 15z + xy - 45y = xy - 30z - 900$$

$$3000 + 30z = xy.$$

Поскольку $z \geq 20$, то $3000 + 30z \geq 3600$

Пусть, периметр ограждений $P = 2(x - 45) + y + 45 + y - 20 - z + 30 + z + 75 + 120 =$

$$= 2x - 90 + 2y + 25 + 65 = 2(x + y).$$

$$P = 2(x + y). \text{ т.к. } xy = 3600, \quad x = \frac{3600}{y}$$

$$P = 2\left(y + \frac{3600}{y}\right)$$

Для $y + \frac{3600}{y}$ применим неравенство Коши о средних ($a+b \geq 2\sqrt{ab}$):

$$y + \frac{3600}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{3600}{y}} = 2 \cdot 60 = 120$$

$$2\left(y + \frac{3600}{y}\right) \geq 240$$

1) $P \geq 240$, при этом минимальный

будет, если $P = 240$ м.

2) Равенство для $y + \frac{3600}{y} \geq 120$ будет выполняться, если $y = \frac{3600}{y}$, т.е. $y = 60$. Тогда, для $xy \geq 3600$ р-во будет выполняться, если $60x = 3600$, $x = 60$. Значит, наим. длина ограждений $P = 240$ м, наименьшее $BK = x = 60$ м, $EK = y = 60$ м, $CH = z = 20$ м.

Ответ: $BK = 60$ м, $EK = 60$ м, $CH = 20$ м, $P = 240$ м.

н 1. Рассмотрим движение минутной стрелки. Пусть a_n - кол-во делений, которое она проходит за n мин. Она проходит $a_1 = 1$ деление, за 2 мин проходит $a_2 = 2$ дел. За n минут она пройдет $a_n = n$ дел. Рассмотрим движение часовых стрелки. Если она z делений она проходит за 1 деление она пройдет за 12 мин. $a_1 = 8.5 = 15$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{12}$

$$n = 15 + \frac{1}{12}n - \frac{1}{12}$$

$$\frac{11n}{12} = \frac{179}{12}$$

$$n = \frac{179}{11} = 16 \frac{3}{11} \text{ мин.}$$

Ответ: через $16 \frac{3}{11}$ мин.