ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 7 8 7

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 9.02.2019.

Площадка написания МГТУ им. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	30					100	сто	Ким

№1.

Скорость часовой стрелки (V_1): $\frac{360^\circ}{720\cdot 60(\text{сек})}=\left(\frac{1}{120}\right)^\circ/\text{сек}.$

Скорость минутной (V_2): $\frac{360^\circ}{3600(\text{сек})}=\left(\frac{1}{10}\right)^\circ/\text{сек}.$

5

$\Delta V=V_2-V_1$

Скорость того как минутная догоняет часовую: $\left(\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{1}{120}\right)=\left(\frac{11}{120}\right)^\circ$ Сек.

Расстояние между ними в начальный момент (S) 90°.

$t=\frac{S}{\Delta V}=\frac{90}{\frac{11}{120}}=\frac{10800}{11}=16$ минут. $21\frac{9}{11}$ секунд

Ответ: через 16 минут и $21\frac{9}{11}$ секунд.

№2.

$A=\sqrt{2017}+\sqrt{2019}$; $B=2\sqrt{2018}$

$A \vee B$

$\sqrt{2017}+\sqrt{2019} \vee 2\sqrt{2018}$) возводим в квадрат пол. числа

$2017+2019+2\sqrt{2017\cdot 2019} \vee 4\cdot 2018$

$2\sqrt{2017\cdot 2019} \vee 2\cdot 2018$) возводим в квадрат

$(2018-1)(2018+1) \vee 2018^2$

$2018^2-1 \vee 2018^2$

$-1 < 0 \Rightarrow A < B$

10

Ответ: $A < B$

№3.

$x, y, a \in R$

$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+a-1 \\ -y^2+y(a-1)-a^2+7a-14=0 \end{cases}$

$D=a^2-2a+1+4(-a^2+7a-14)=-3a^2+26a-55 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \left[\frac{11}{3}; 5\right]$

$\begin{cases} (x+y)^2=(a-1)^2 \\ 2xy=2a^2-14a+28 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=a^2-2a+1-2xy \\ 2xy=2a^2-14a+28 \end{cases}$

$x^2+y^2=-a^2+12a-27$

$a_{min}=-\frac{12}{-2}=6$

15

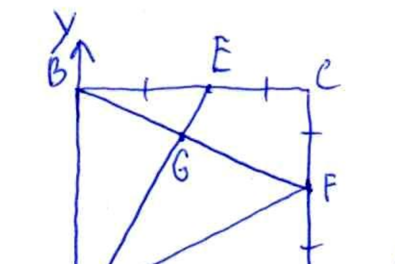
Т.к. ветви параболы вниз, из-за отр. коэффициента перед a^2, то при $a \in (-\infty; 6]$ – функция возрастает $\Rightarrow$ при $a \in \left[\frac{11}{3}; 5\right]$ – функция возрастает $\Rightarrow a=5$

Проверка:

$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4}{y}+y=4 \\ x=\frac{4}{y}; y\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-4y+4=0 \Rightarrow \\ x=\frac{4}{y} \end{cases}$ $\begin{cases} (y-2)^2=0 \\ x=\frac{4}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \in R \end{cases}$ – подходят.

Ответ: $a=5$.

№4.



Дано: $ABCD$ – квадрат, $BE=EC=CF=FD$.

Сравнить: S_{GECF} и S_{AGF}

Введём координаты отн. точки $A(0;0)$. $a>0$

Пусть $D(a;0)$, $B(0;a)$, $C(a;a)$, $E(\frac{a}{2};a)$, $F(a;\frac{a}{2})$.

Найдём уравнение прямой AE:

$y_1=k_1x+b_1$; пересекает точку $A(0;0)$ и $E(\frac{a}{2};a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0=0+b_1 \Rightarrow b_1=0$; $a=\frac{a}{2}\cdot k_1 \Rightarrow k_1=2 \Rightarrow y_1=2x$

Найдём уравнение прямой BF:

$y_2=k_2x+b_2$; пересекает точку $B(0;a)$ и $F(a;\frac{a}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a=b_1$; $\frac{a}{2}=k_2\cdot a+a \Rightarrow \frac{1}{2}=k_2+1 \Rightarrow k_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_2=-\frac{1}{2}x+a$

Найдём координаты точки G:

ШИФР 3 7 7 8 7

№4 (продолжение.)

$y_1=y_2 \Rightarrow 2x=-\frac{1}{2}x+a \Rightarrow \frac{5}{2}x=a \Rightarrow x=\frac{2}{5}a \Rightarrow y=\frac{4}{5}a \Rightarrow G(0{,}4a;\ 0{,}8a)$

$GF=\sqrt{(a-0{,}4a)^2+\left(\frac{a}{2}-0{,}8a\right)^2}=\sqrt{0{,}36a^2+0{,}09a^2}=\sqrt{a^2\cdot\frac{45}{100}}=\frac{3a}{2\sqrt5}$

$AG=\sqrt{(0{,}4a-0)^2+(0{,}8a-0)^2}=\sqrt{0{,}8a^2}=a\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2a}{\sqrt5}$

$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt5}{2}=AE$

$p_{AGF}=\dfrac{\frac{3a}{2\sqrt5}+\frac{2a}{\sqrt5}+\frac{a\sqrt5}{2}}{2}=\frac{3a+4a+5a}{4\sqrt5}=\frac{3a}{\sqrt5}$

$S_{AGF}=\sqrt{\frac{3a}{\sqrt5}\cdot\left(\frac{3a}{\sqrt5}-\frac{3a}{2\sqrt5}\right)\cdot\left(\frac{3a}{\sqrt5}-\frac{2a}{\sqrt5}\right)\cdot\left(\frac{3a}{\sqrt5}-\frac{a\sqrt5}{2}\right)}=\sqrt{\frac{3a}{\sqrt5}\cdot\frac{3a}{2\sqrt5}\cdot\frac{a}{\sqrt5}\cdot\frac{a}{2\sqrt5}}=$

$=\sqrt{\frac{a^4\cdot9}{25\cdot4}}=\frac{3a^2}{10}$ — по формуле Герона для $\triangle AGF$.

$\triangle ABE=\triangle AFD$ (~~2 катета~~ по 2 ст. и углу между ними AB и BE и 90°) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABE}=S_{AFD}=\dfrac{a\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{4} \Rightarrow S_{ABE}+S_{AFD}=\frac{a^2}{2}$; $S_{ABCD}=a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AECF}=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$;

20

$S_{GECF}=S_{AECF}-S_{AGF}=\frac{a^2}{2}-\frac{3a^2}{10}=\frac{a^2}{5}$

$S_{AGF}=\frac{3a^2}{10} > S_{GECF}=\frac{2a^2}{10}$; т.к. $a>0$

Ответ: $S_{AGF}>S_{GECF}$.

№5.

$y=\sqrt{1-\cos^2x}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$; $\sin x\neq0 \Rightarrow x\neq\pi n, n\in Z$.

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-\cos^2x}=|\sin x|\\ \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}=\frac{1}{|\sin x|}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2x}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}=|\sin x|\cdot\frac{1}{|\sin x|}=1$; $x\neq\pi n, n\in Z$

$\sqrt{x^2-6x+9}=|x-3| \Rightarrow$

$\Rightarrow y=|x-3|$; $x\neq\pi n, n\in Z$;

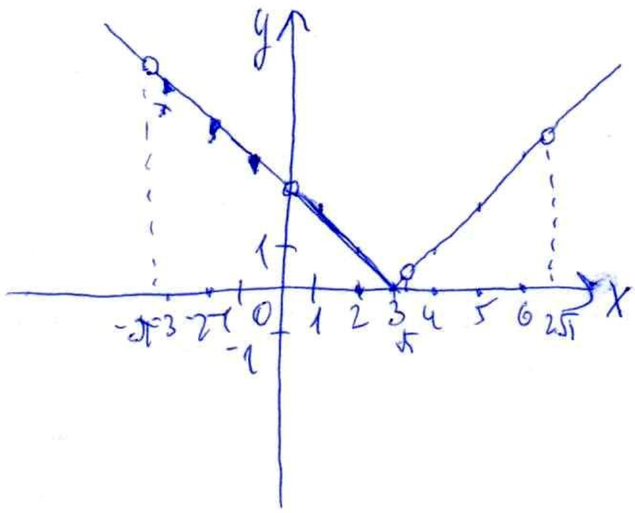
ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 7 7 8 7

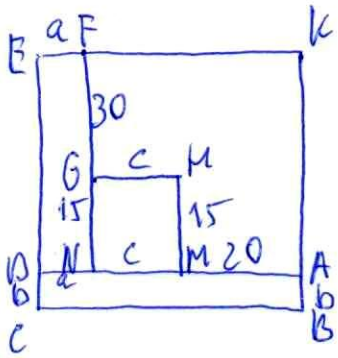
№5 (продолжение)



$x \neq \pi n, n \in Z$.

20

№6.



Дано: $MA=20$м; $MN=15$м$=NG$; $GH \geq 20$м; $GF=30$м

Найти: $2(CE+EK)$ − min и при каких зн. BK, KE и GH.

Решение: $a>0$ $b>0$

Пусть $EF=DN=a$; $CD=AB=b$ и $GH=NM=c$, тогда:

$ED=30+15=45=KA$

$2(CE+EK)=2\cdot(b+45)+2(a+c+20)=(130+2a+2b+2c)$ − min; $c \geq 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ миним. при c − миним., берем $c=20 \Rightarrow (170+2(a+b))$ − min.

30

$45a+ab+40b=1800 \Rightarrow a=\dfrac{1800-40b}{b+45} \Rightarrow a+b=\dfrac{b^2+45b+1800-40b}{b+45}=$

$=\left(\dfrac{b^2+5b+1800}{b+45}\right)'=\dfrac{(2b+5)(b+45)-(b^2+5b+1800)}{b^2+90b+2025}=\dfrac{b^2+90b-1575}{b^2+90b+2025}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2+90b-1575=0$

$D=8100+6300=14400$

$b=\dfrac{-90\pm120}{2}=15$м; -105 − не удовл. $\Rightarrow a=\dfrac{1200}{60}=20$м $\Rightarrow 170+2(15+20)=240$

$BK=15+45=60$м; $KE=a+40=60$м; $GH=20$м

$BK=60$м; $KE=60$м; $GH=20$м.

Ответ: 240 метров, $BK=60$м; $KE=60$м; $GH=20$м.